TEMA 2.2 A 2.4

CINVE

6 DE NOVIEMBRE 2015

Antoni Espasa

antoni.espasa@uc3m.es

2.2

- PROCESOS ESTOCASTICOS Y PROCESOS ESTOCASTICOS ESTACIONARIOS.

- FACTORIZACION DE LA FUNCION DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA DE T VARIABLES EN UN PROCESO ESTOCASTICO ESTACIONARIO.

- Una serie temporal es una realización finita de un proceso estocástico {x(t)}

Proceso estocástico	$\ldots\ x(1)\ x(2)\ x(3)\ \ldots\ x(\mathrm{T})\ \ldots$
Serie temporal (observada)	$x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_T$
Otras posibles series temporales	$x_1^1 x_2^1 x_3^1 \ldots x_T^1$ $x_1^2 x_2^2 x_3^2 \ldots x_T^2$ $\vdots$ $x_1^r x_2^r x_3^r \ldots x_T^r$

antoni.espasa@uc3m.es

Condicionalización según la recursividad temporal

En variables observadas a lo largo del tiempo, parece natural suponer que el futuro no influye en el pasado, con lo que utilizando la anotación

$$X_t^j = \left(X_j^{\prime}, X_{j+1}^{\prime}, \ldots, X_t^{\prime}\right)^{\prime} \;, t > j \geq 1 \qquad \text{(II.5)}$$

X_T^j recoge todos los datos de la muestra, y

$$X_{t-h}^{+} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_{t-h}^1 \end{pmatrix} \qquad \text{(II.6)}$$

es una submuestra que incluye las condiciones iniciales X_0, con lo que se puede escribir

$$D_x\left(X_T^1/X_0;\ \theta^{(t)}\right) = D(X_t/X_{T-1}^1, X_0;\ \lambda_T)\ .\ D\left(X_{T-1}^1/X_0;\ \delta^{(t)}\right) \qquad \text{(II.7)}$$

y repitiendo este proceso de factorización respecto a X_{T-1}^1, X_{T-2}^1, … , X_t se obtiene

$$D_x\left(X_T^1/X_0;\ \theta^{(t)}\right) = \prod_{t=1}^{T} \quad D(X_t/X_{T-1}^{+};\ \lambda_T) \qquad \text{(II.8)}$$

En (II.8) el vector $\lambda^{\prime}$= ($\lambda_1^{\prime}$, …, $\lambda_T^{\prime}$)´= f($\theta^{(t)}$), es una función de $\theta^{(t)}$.

Restricciones de homogeneidad

En (II.8) las funciones de densidad condicional son heterogéneas en el tiempo y dado que hay una única observación de todas las variables, la reducción es imprescindible. Usualmente la restricción que se incorpora es que los parámetros λ_t no son dependientes del tiempo, es decir, $\lambda_t = \lambda$. Con ello,

$$D_x\,(X_T^1/X_0;\theta) = \prod_{t=1}^{T} \quad D(X_T/X_{T-1}^{+};\lambda) \qquad \text{(II.9)}$$

Obsérvese que la restricción recogida en (II.9) normalmente implicará que los coeficientes de las esperanzas matemáticas condicionales son constantes, pero abarca también la situación conocida en literatura como modelos con coeficientes que varían de forma estocástica, pues entonces en tales modelos existen unos “meta-parámetros” que son constantes, y se recogen en el vector λ.

Con la restricción de homogeneidad la estructura de las funciones de densidad condicional es constante en el tiempo.

La dependencia en esas funciones puede alargarse hasta el infinito y es necesaria una restricción de memoria

$$f(W_T^1 \mid W_0, \delta) = \prod_{t=1}^{T} f_t(W_t \mid W_{t-1}^1, W_0, \lambda)$$

antoni.espasa@uc3m.es

Restricciones en la dependencia de los datos (memoria)

- En la ecuación anterior λ debe tener dimensión finita, dígase s.
- Bien porque la memoria va hasta el retardo s (modelos AR).
- Bien porque la memoria va hasta el infinito pero con una estructura de parámetros que converge a cero. Procesos ARMA.

2.3

- MODELOS DE RAICES UNITARIAS EN LA TENDENCIA Y LA ESTACIONALIDAD.

- MODELOS $I(d,m^s)$, SUS PROPIEDADESTENDENCIALES Y LAS DE SUS CORRESPONDIENTES DIFERENCIACIONES.

LA SOLIDEZ DE LAS RAICES UNITARIAS EN LA PREDICCION

- En el esquema

$$X_t = \text{Media Segmentada}_t + W_t$$

si cambia la tendencia con la aparición de una nueva segmentación el modelo predice siempre mal.

En el esquema

$$x_t = x_{t-1} + w_t$$

si cambia la tendencia en t el modelo predice mal en t pero posteriormente ya incorpora la tendencia.

TENDENCIAS ALEATORIAS DE RAICES UNITARIAS: PROCESOS INTEGRADOS .

$$X_t = \mu_t + \eta^*_t \qquad (6.3.3a)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + v_t, \qquad (6.3.3b)$$

$$X_t = \mu_t + \eta_t^* = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_{t-j} + \eta_t^* = \frac{\nu_t}{\Delta} + \eta_t^*$$

$$\Delta X_t = \nu_t + \Delta \eta_t^*$$

$$X_t = X_{t-1} + \eta_t.$$

Bajo el supuesto de que η_t admite una representación ARMA el modelo (6.3.5) se puede escribir como:

$$\phi_p(L)(X_t - X_{t-1}) = \theta_q(L)a_t \ , \quad (6.3.10)$$

es decir

$$\phi_p(L)(1-L)X_t = \theta_q(L)a_t \, , \quad (6.3.11)$$

y definiendo

$$\tilde{\phi}_{p+1}(L) = \phi_p(L)(1-L), \quad (6.3.12)$$

se tiene que

$$\tilde{\phi}_{p+1}(L)X_t = \theta_q(L)a_t \, . \quad (6.3.13)$$

A partir de (6.3.13) se tiene que su formulación en términos de medias móviles es:

(6.3.14)

$$X_t = (1-L)^{-1}\psi_\infty(L)a_t,$$

es decir

(6.3.15)

$$X_t = \overline{\psi}_\infty(L)a_t,$$

donde (6.3.16)

$$\overline{\psi_j} = \sum_{h=0}^{j}\psi_h.$$

Ahora

$$\overline{\psi_j} \neq 0,\ j \to \infty,$$

y

(6.3.18)

$$\overline{\psi_j} \to \psi_\infty(1) = c,\ j \to \infty.$$

$$X_t = (1-L)^{-1}\psi_{\infty}(L)a_t$$

- El polinomio estacionario $\Psi_{\infty}(L)$ sobre a_t capta que una innovación tiene efectos (adicionales) posteriores al momento de su aparición inicial.
- En economía esto se debe a que existen costes de ajuste.
- En la serie no estacionaria el efecto permanente de una innovación tarda en asimilarse.

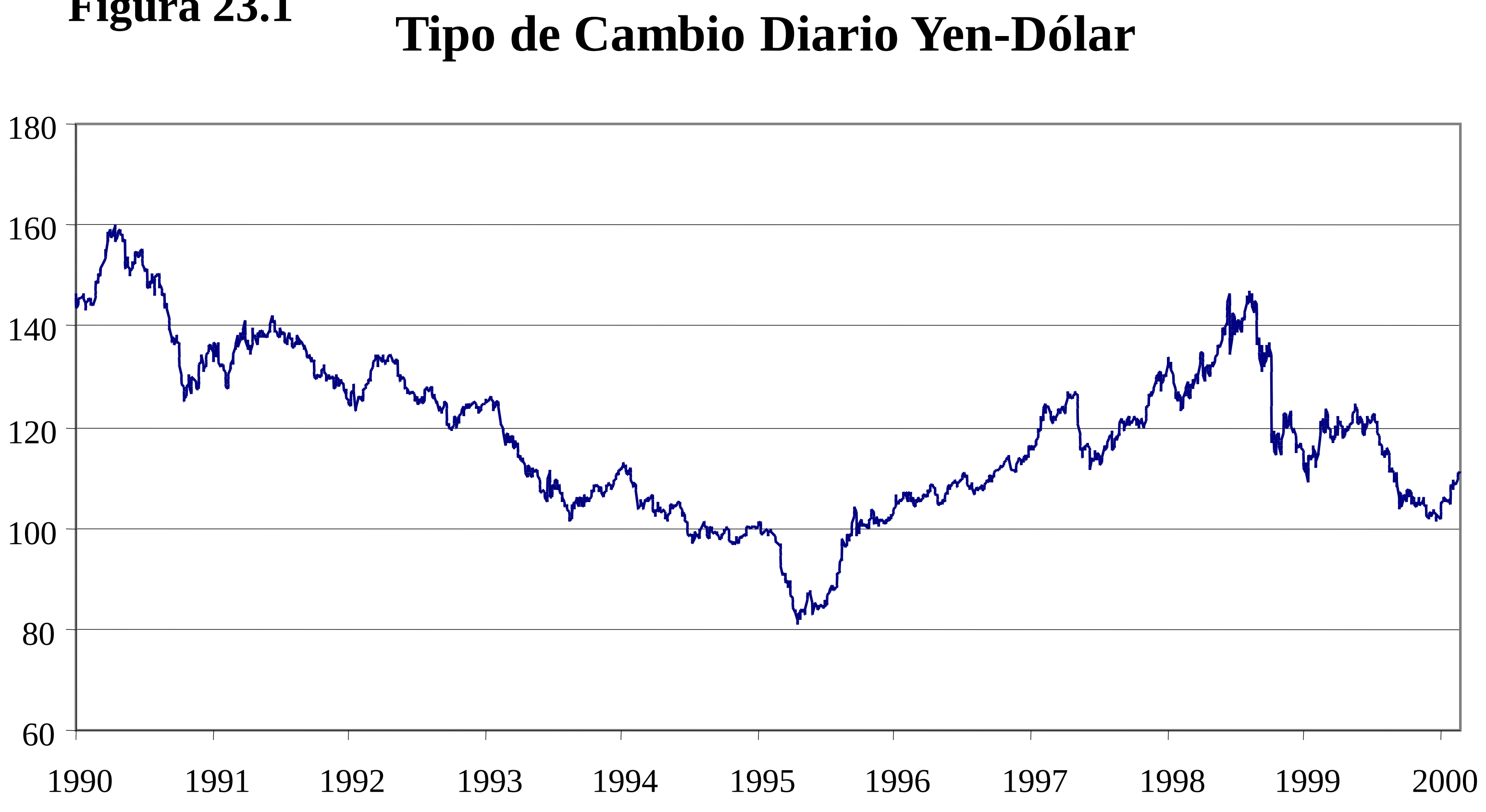
LAS TENDENCIAS ESTOCÁSTICAS: SERIE I(1)

- La serie X_t en (2) se caracteriza por el hecho de que tomando las primeras diferencias

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = W_t \qquad (3)$$

- Los datos transformados no tienen evolutividad.
- Decimos que X_t es integrada de orden 1 porque si tomamos las primeras diferencias una vez, los datos resultantes son estacionarios. X_t se denomina I(1). La terminología I(·) indica que la tendencia es estocástica.

Figura 23.1

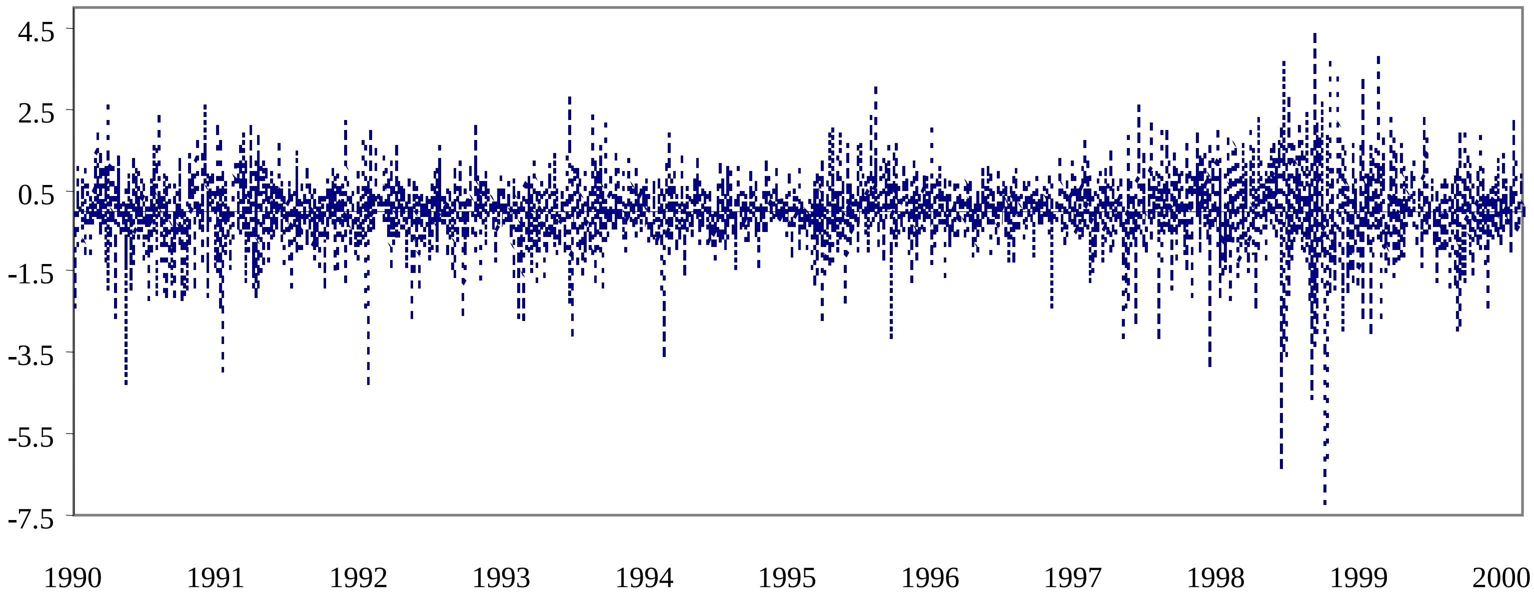


Período: 2/01/1990 -25/02/2000

Fuente: *FRED (Federal Reserve Economic Data)*

Figura 23.2

Variaciones Diarias en el Tipo de Cambio Yen-Dólar



Período: 2/01/1990 - 25/02/2000

Fuente: *FRED (Federal Reserve Economic Data)*

Procesos integrados.

Procesos integrados de orden I (1, m^s).

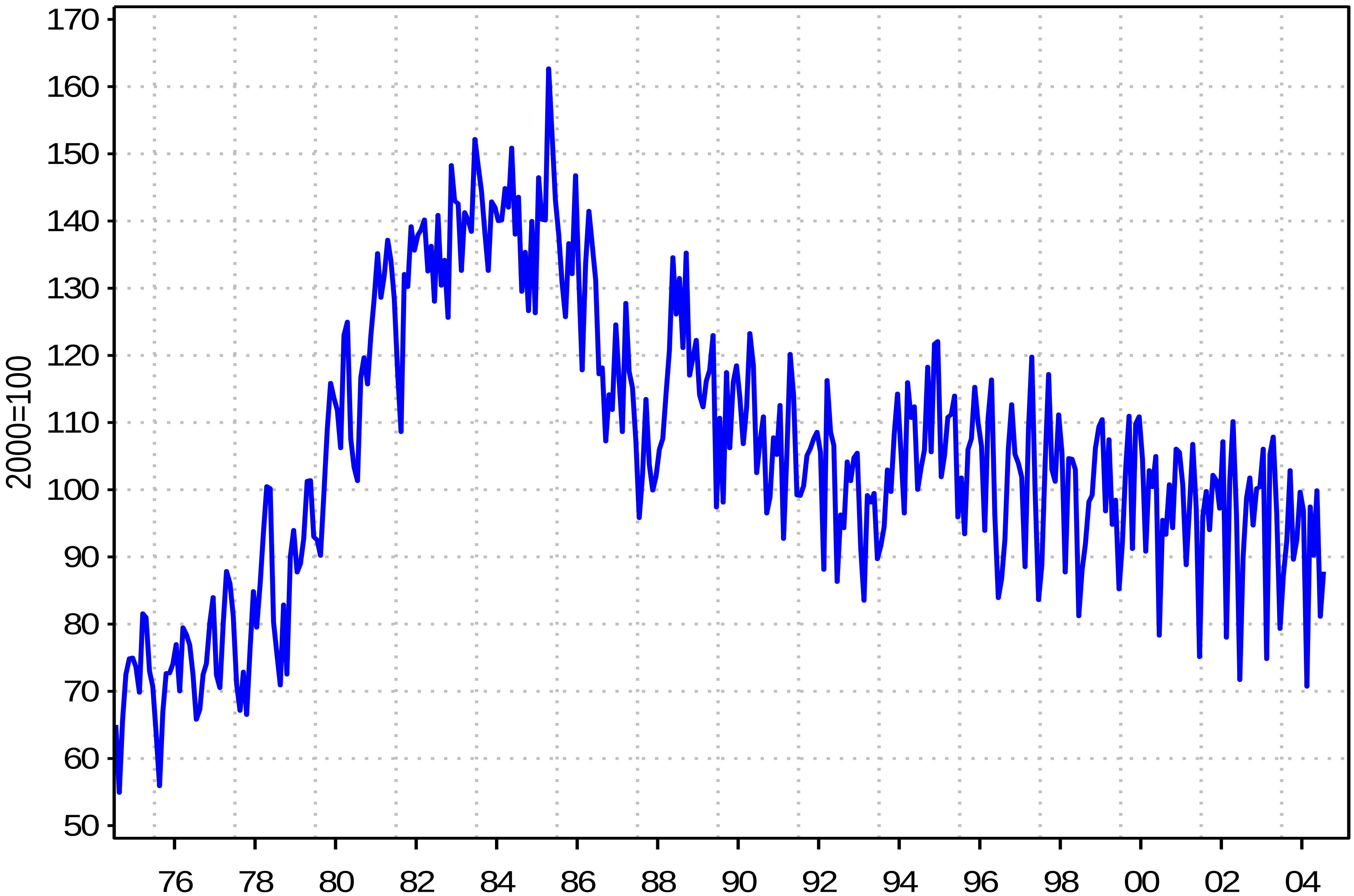
antoni.espasa@uc3m.es

DIVERSIDAD DE TENDENCIAS

Las tendencias se presentan en las diversas series económicas dependiendo de cómo se incorpora esa acumulación de conocimiento y cambios en los hábitos y organización social en la magnitud económica que cada serie representa.

Así, en sectores productivos que se van quedando estancados, por ejemplo la minería en la economía española, los incrementos en la incorporación tecnológica tienen media cero y la tendencia en dicha serie presenta oscilaciones locales de nivel pero no muestra crecimiento sistemático, se dice que es una serie integrada con media cero en sus incrementos: I (1,0).

Index of Mining and quarrying total in Spain



antoni.espasa@uc3m.es

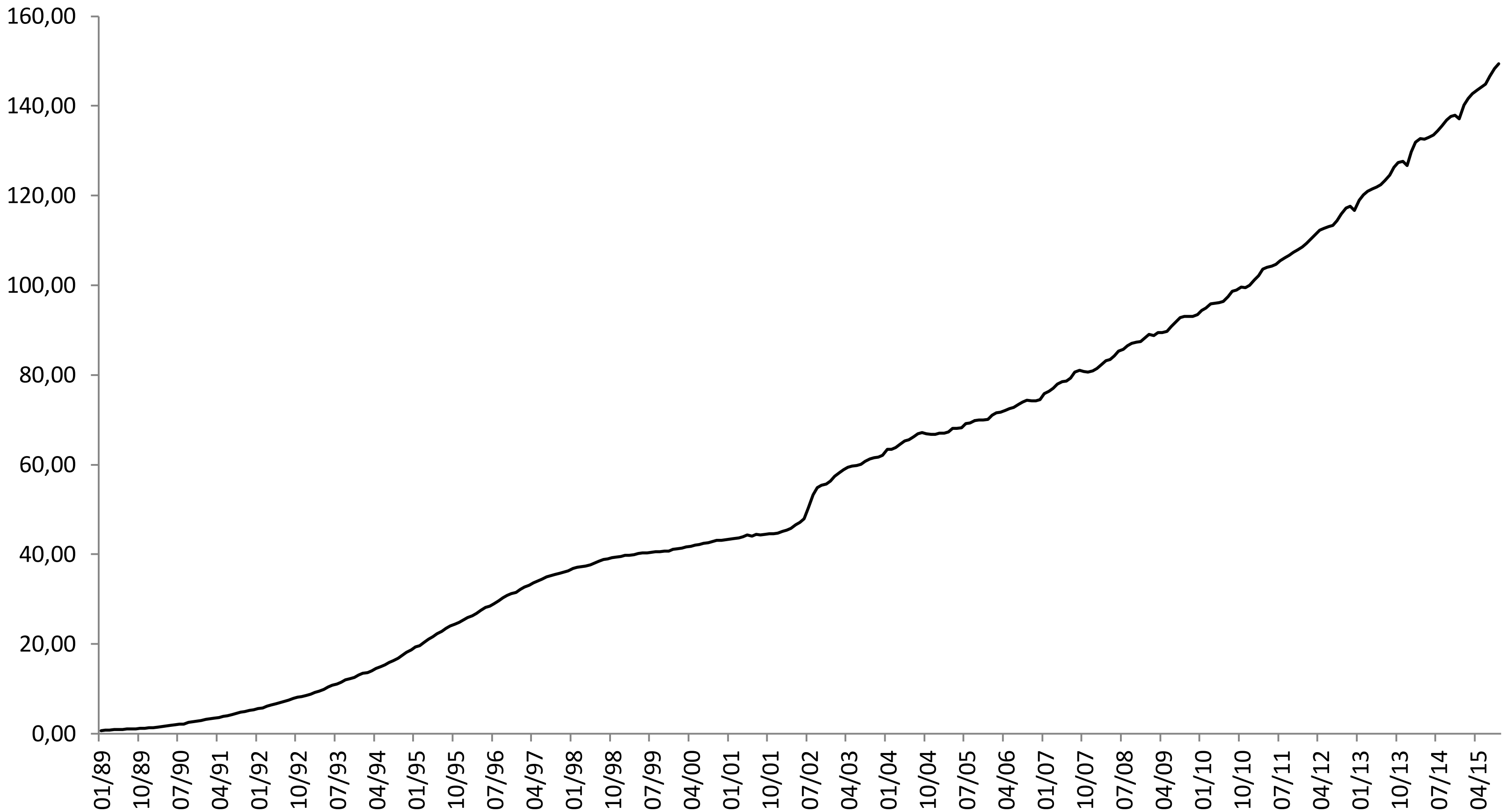
Source: EcoWin

TENDENCIAS CON CRECIMIENTO SISTEMÁTICO

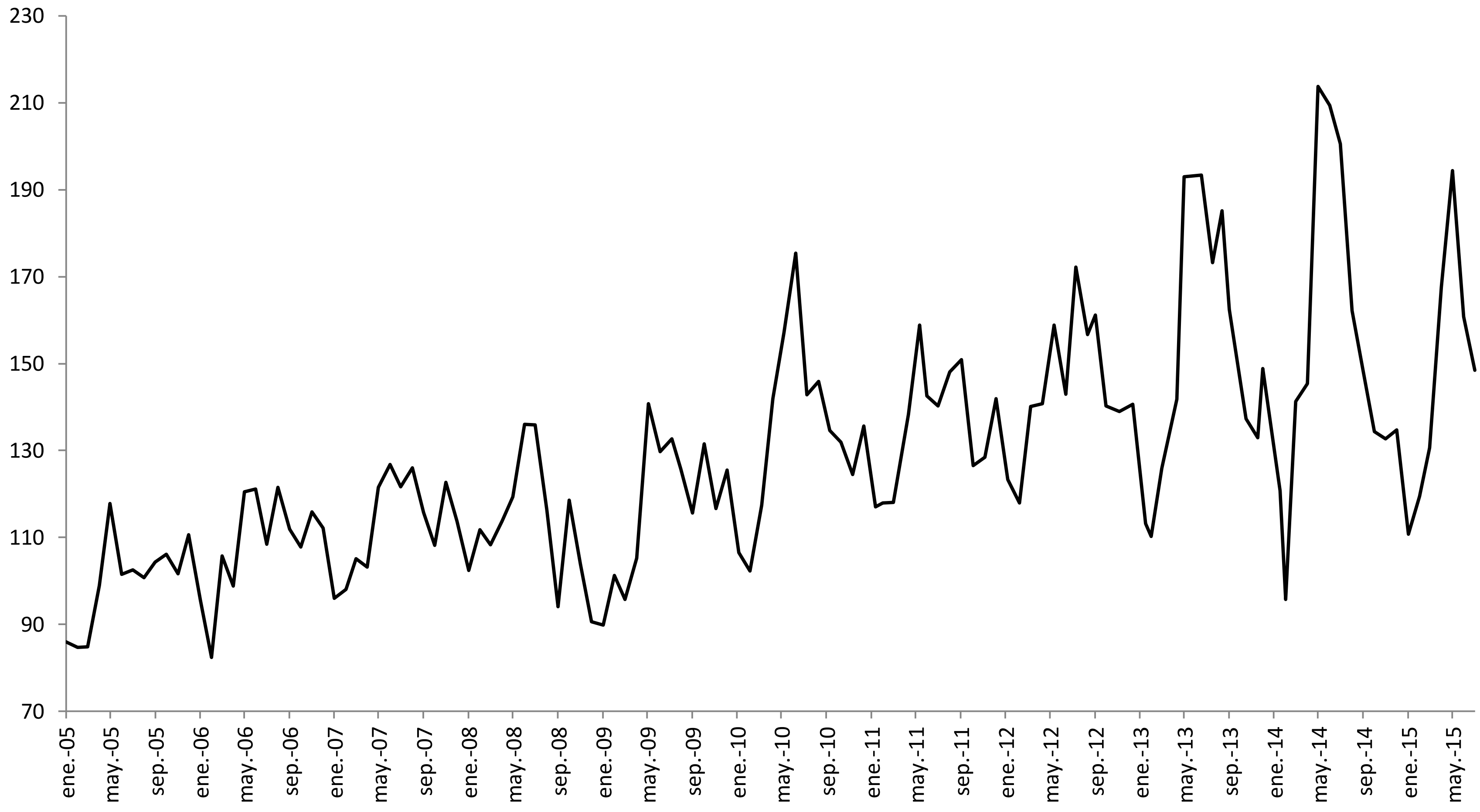
Si embargo, en la mayor parte de los casos los cambios tecnológicos tienen media distinta de cero y las series presentan crecimiento sistemático.

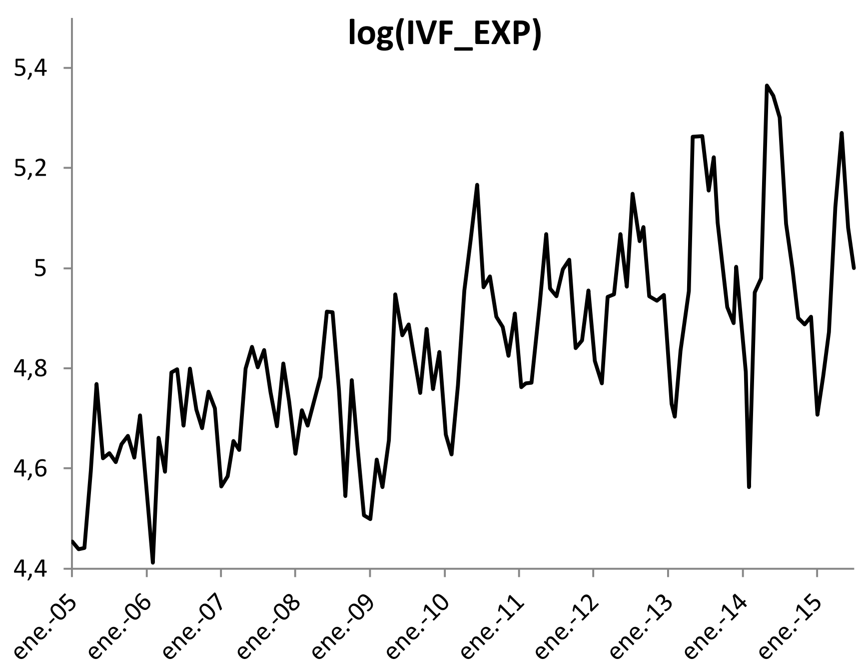
Si dicha media es constante a la serie se le denomina I(1,1).

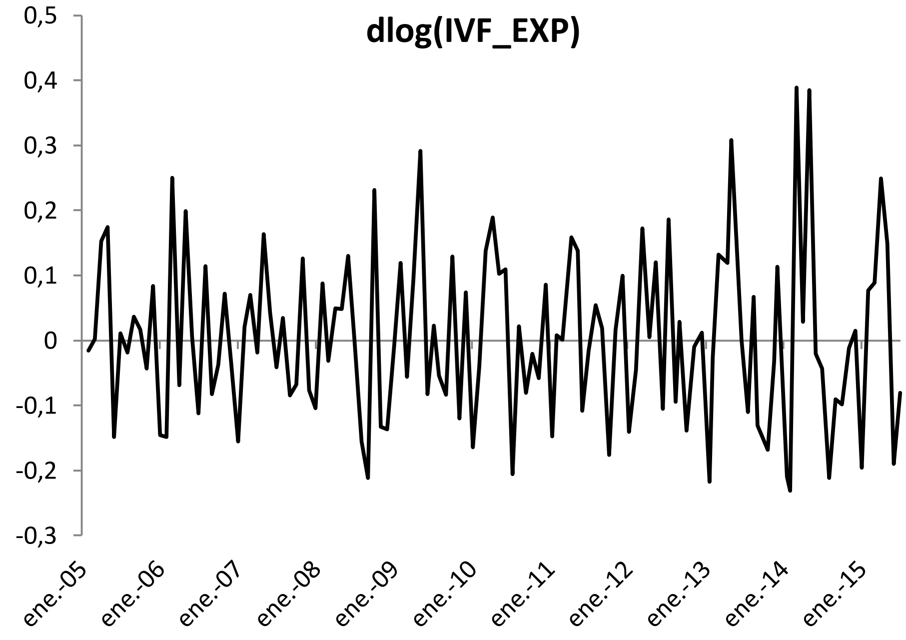
Índice de Precios al Consumo (1989-2015)
Fuente: INE

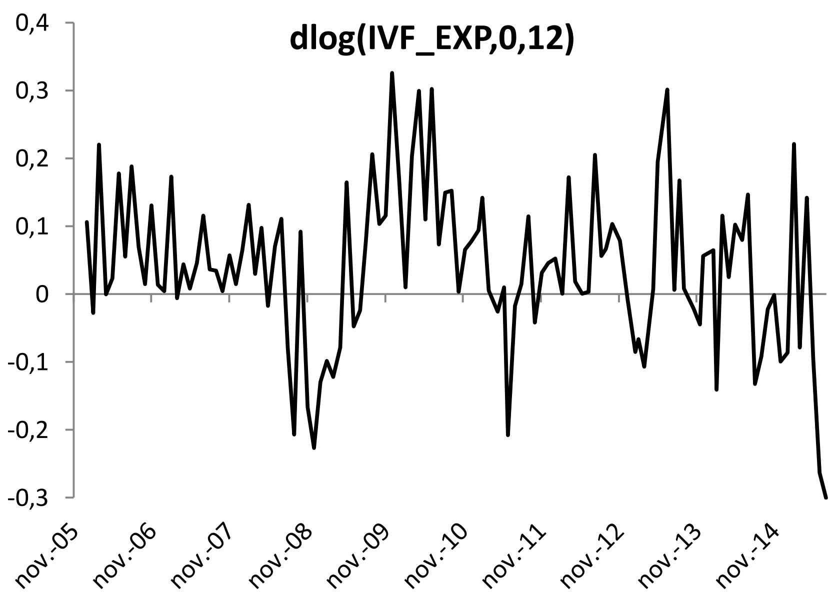


IVF Exportaciones (2005-2015) Fuente:INE




log(IVF_EXP)
5,4
5,2
5
4,8
4,6
4,4
ene.-05
ene.-06
ene.-07
ene.-08
ene.-09
ene.-10
ene.-11
ene.-12
ene.-13
ene.-14
ene.-15


dlog(IVF_EXP)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
ene.-05
ene.-06
ene.-07
ene.-08
ene.-09
ene.-10
ene.-11
ene.-12
ene.-13
ene.-14
ene.-15


dlog(IVF_EXP,0,12)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
nov.-05
nov.-06
nov.-07
nov.-08
nov.-09
nov.-10
nov.-11
nov.-12
nov.-13
nov.-14

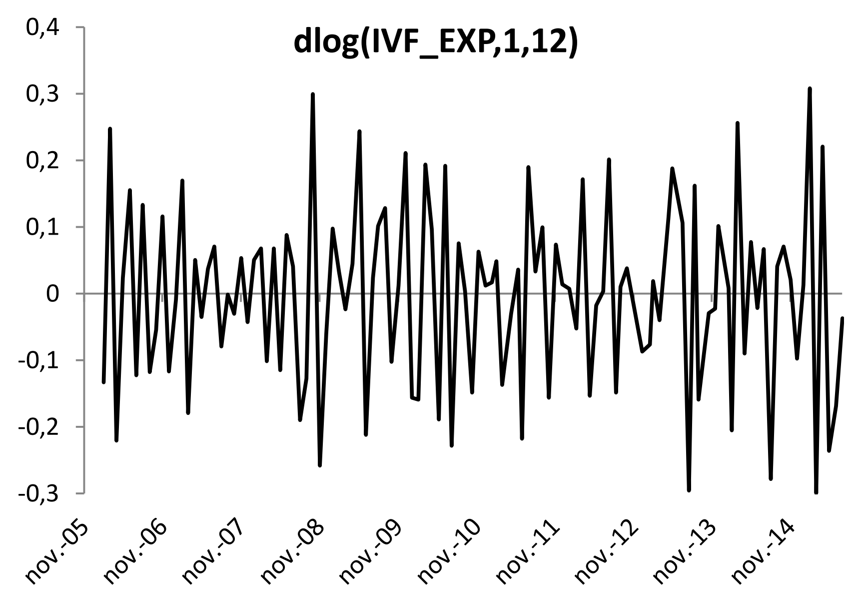
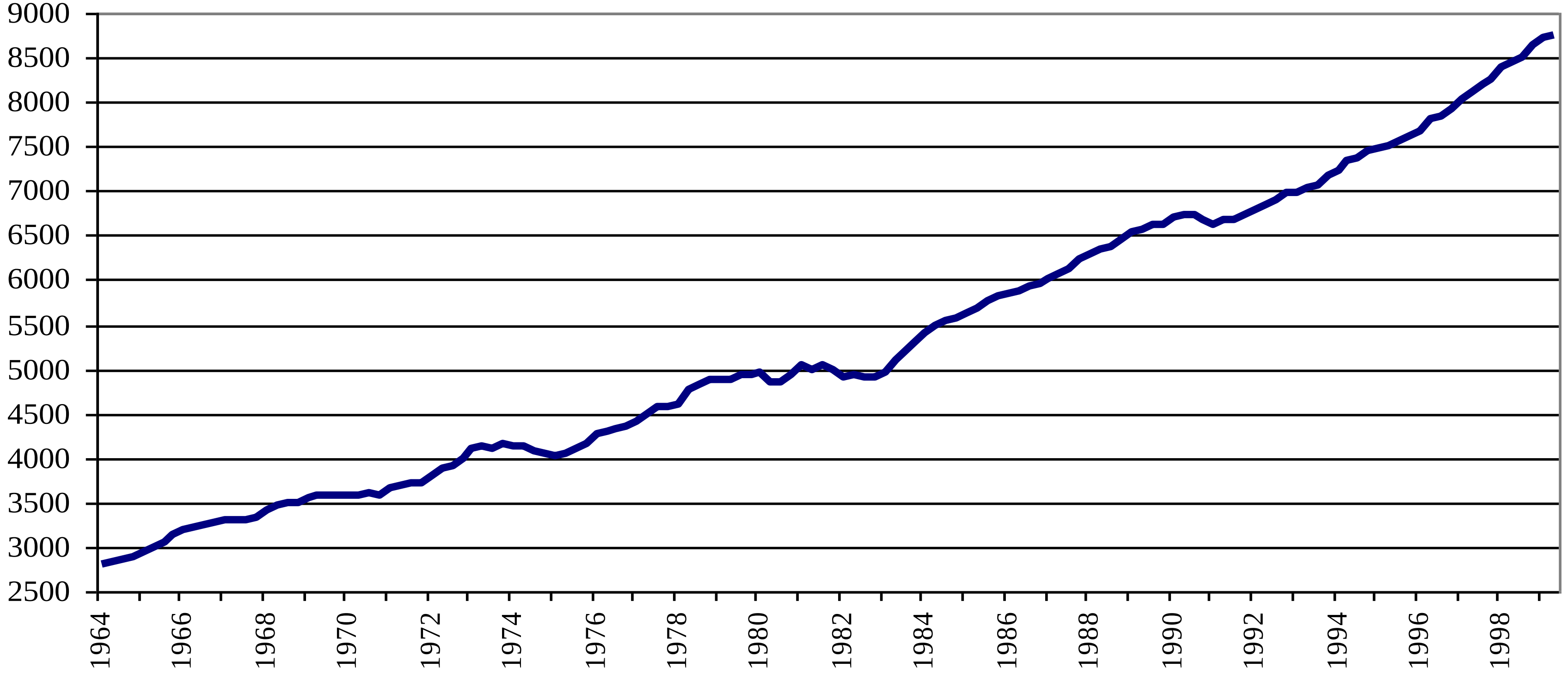

dlog(IVF_EXP,1,12)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
nov.-05
nov.-06
nov.-07
nov.-08
nov.-09
nov.-10
nov.-11
nov.-12
nov.-13
nov.-14

Figure 2.12

Quarterly US Real Gross Domestic Product ($X9_t$)



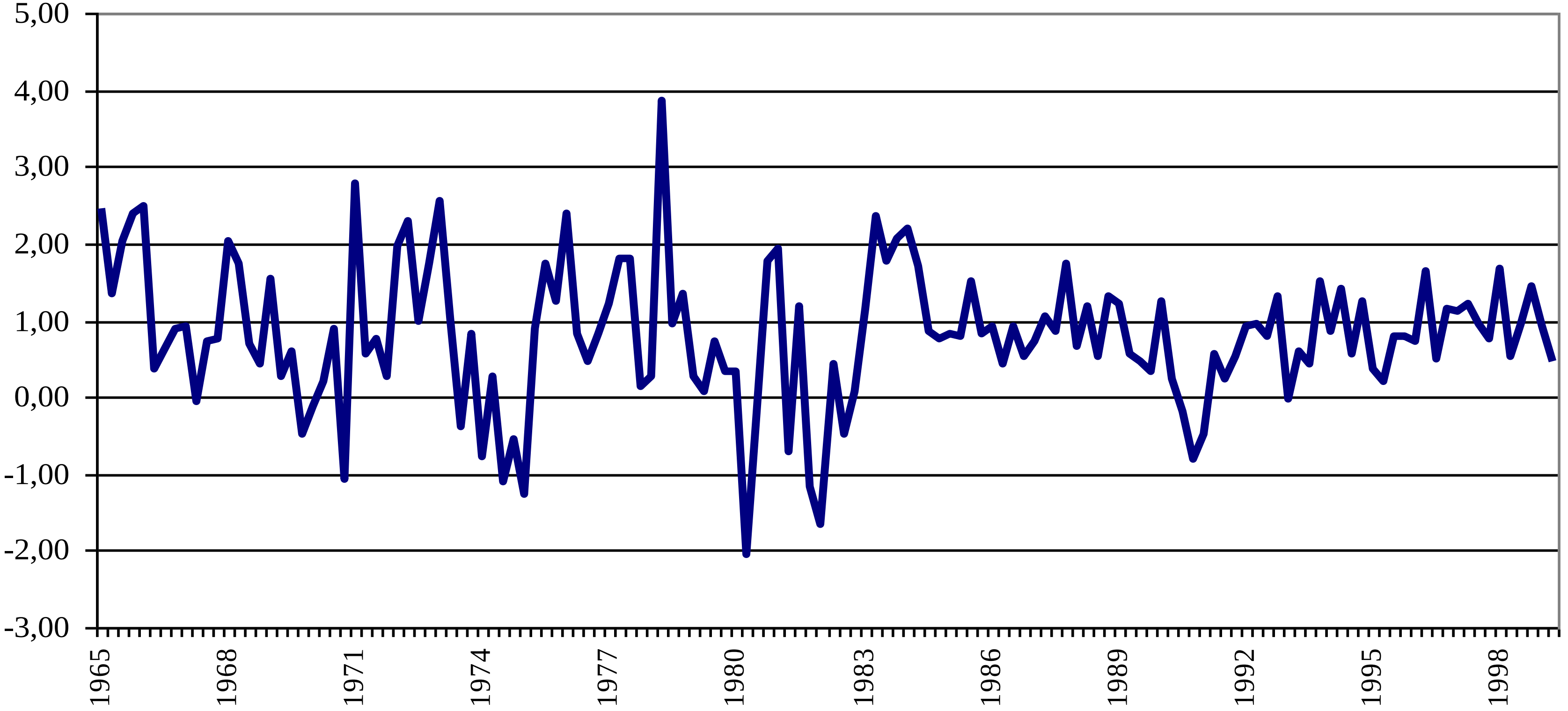
Period: I-1964 / II-1999

Source: *BEA*

At constant 1996 prices. Non Seasonally adjusted.

antoni.espasa@uc3m.es

Quarterly variations US Gross Domestic Product



Period: I-1964 / II-1999

Source: *BEA*

At constant 1996 prices. Non Seasonally adjusted.

SERIES INTEGRADAS I(1) CON CRECIMIENTO SISTEMÁTICO

- La Serie anterior de tipo de cambio I(1) solo muestra oscilaciones locales de nivel.
- Una serie integrada con crecimiento sistemático se puede integrar como:

$$Z_t = Z_{t-1} + b + w_t \qquad (4)$$

- Tomando las primeras diferencias

$$\Delta Z_t = b + w_t \qquad (5)$$

- Comparando:
  - ΔZ_t en (5) con
  - ΔX_t en (3)

vemos que la media de $\boldsymbol{\Delta X_t}$ es **nula** y que la media de $\boldsymbol{\Delta Z_t}$ es **b**.

Por lo tanto $\boldsymbol{X_t}$ solo tiene oscilaciones locales de nivel y $\boldsymbol{Z_t}$ tiene crecimiento sistemático.

Los dos son I(1), pero muy distintas.

SERIES INTEGRADAS I(1) CON CRECIMIENTO SISTEMÁTICO

- LA VARIABLE Z EN LA EQUACION (4) TIENE CRECIMIENTO DETERMINISTA Y
- ESE COMPONENTE ES DE MAYOR IMPORTANCIA A LARGO PLAZO QUE EL COMPONENTE I(1).

LA TERMINOLOGÍA I(1,m)

- Para incluir el hecho de que la media de ΔX_t puede o no ser nula en las series I(1), usamos la terminología I(1,m) con m = 0 si la media de ΔX_t es nula y

  m = 1 si la media de ΔX_t no es nula.
- Así, X_t en (2) es I(1,0) y
- Z_t en (a) es I(1,1).
- En I(1,m)

  h = 1 + m

  nos da el número de factores tendenciales: 1 ó 2.

SERIE I(1,0)

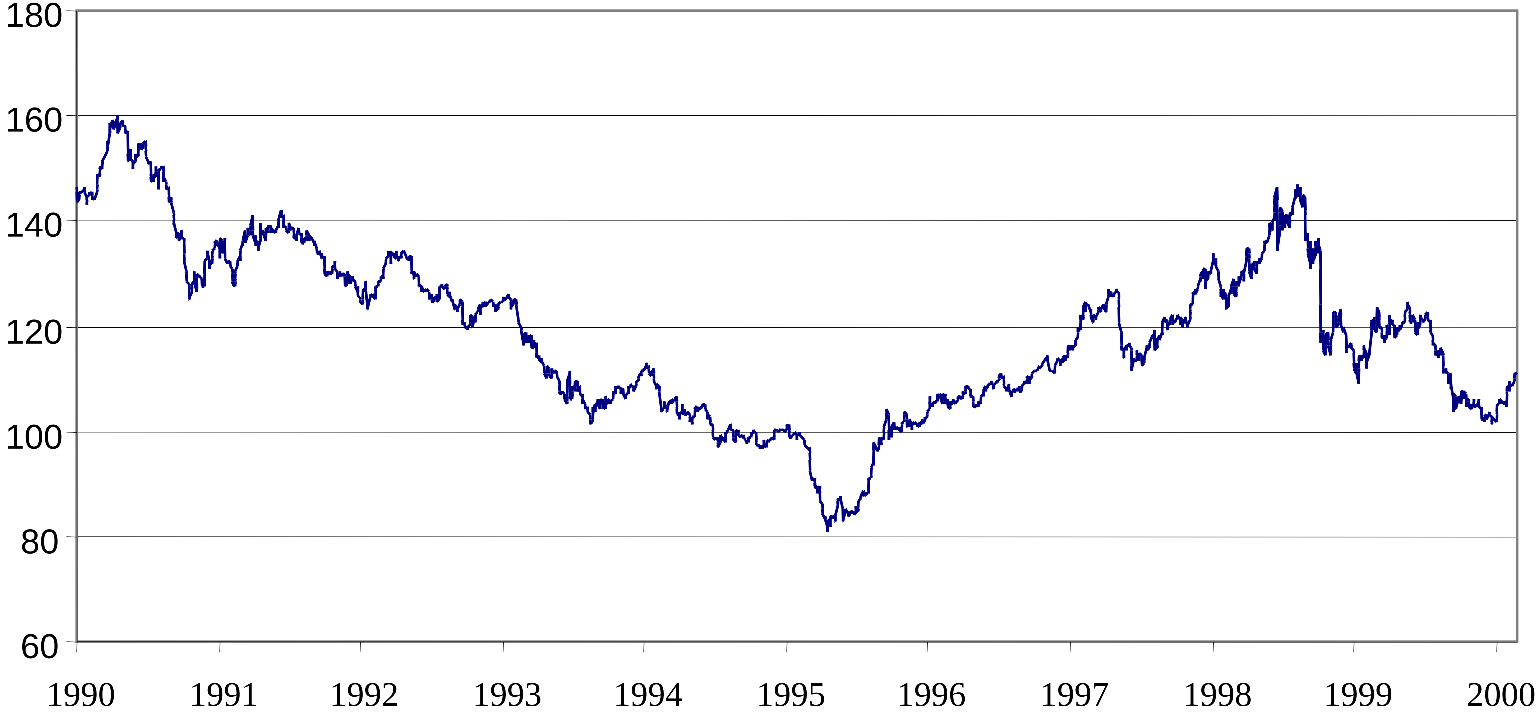
- LA SERIE DE TIPO DE CAMBIO

La serie diferenciada tiene media cero

antoni.espasa@uc3m.es

Figura 23.3

Tipo de Cambio Diario Yen-Dólar

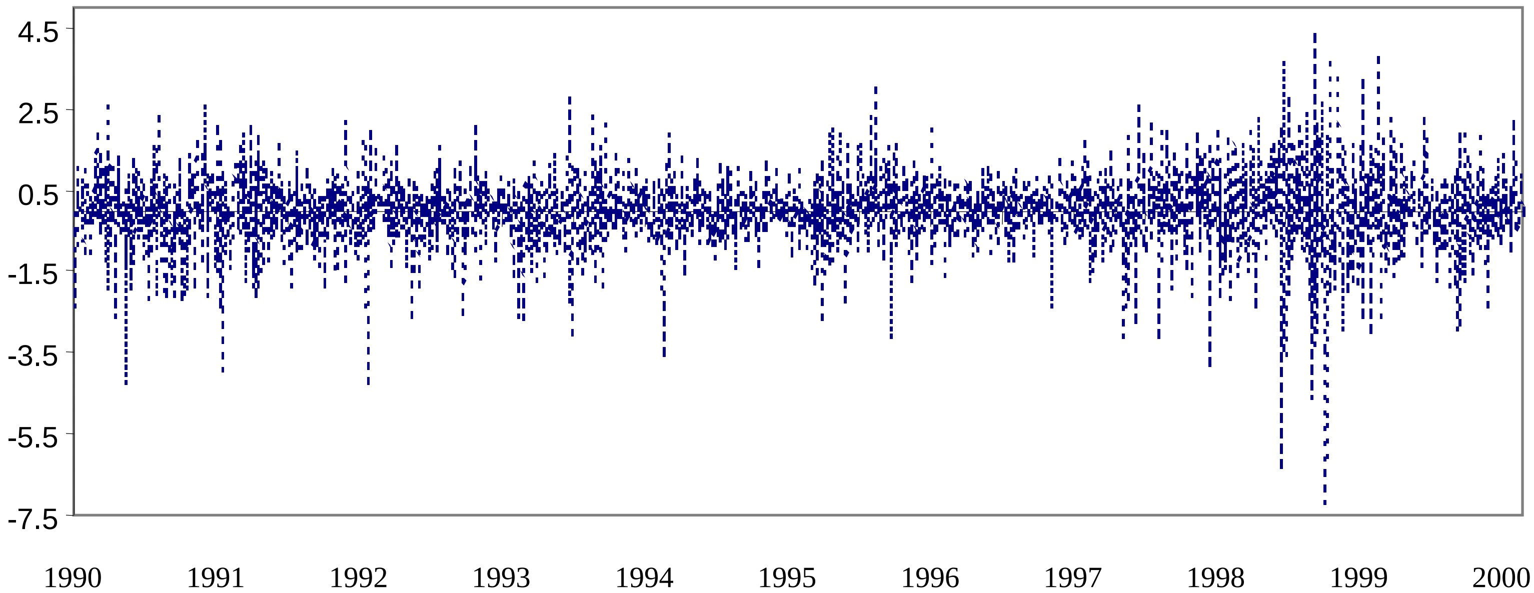


Período: 2/01/1990 -25/02/2000

Fuente: *FRED (Federal Reserve Economic Data)*

Figura 23.4

Variaciones Diarias en el Tipo de Cambio Yen-Dólar



Período: 2/01/1990 - 25/02/2000

Fuente: *FRED (Federal Reserve Economic Data)*

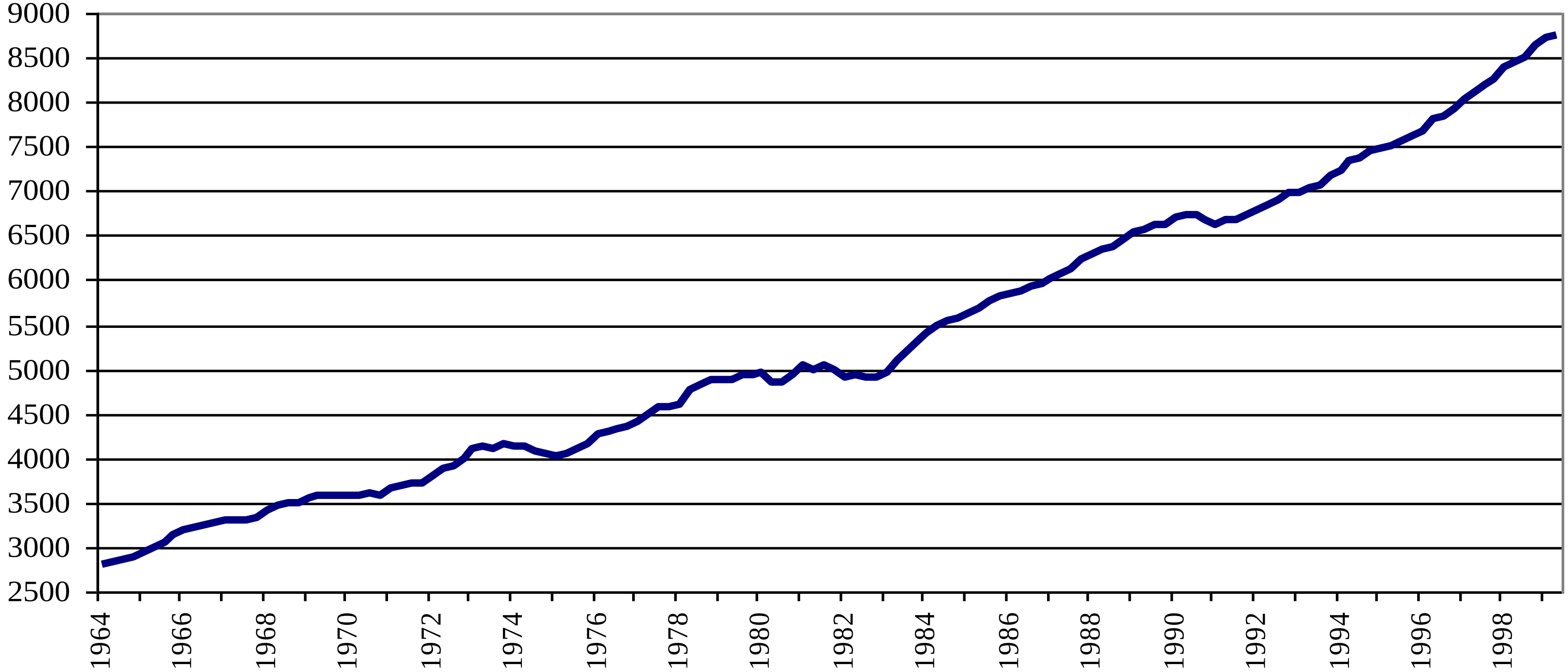
SERIE I(1.1)

- LA SERIE DE PIB

- La serie diferenciada tiene media distinta de cero.
- En consecuencia ,tiene crecimiento y éste es constante.

Figure 2.12

Quarterly US Real Gross Domestic Product ($X9_t$)

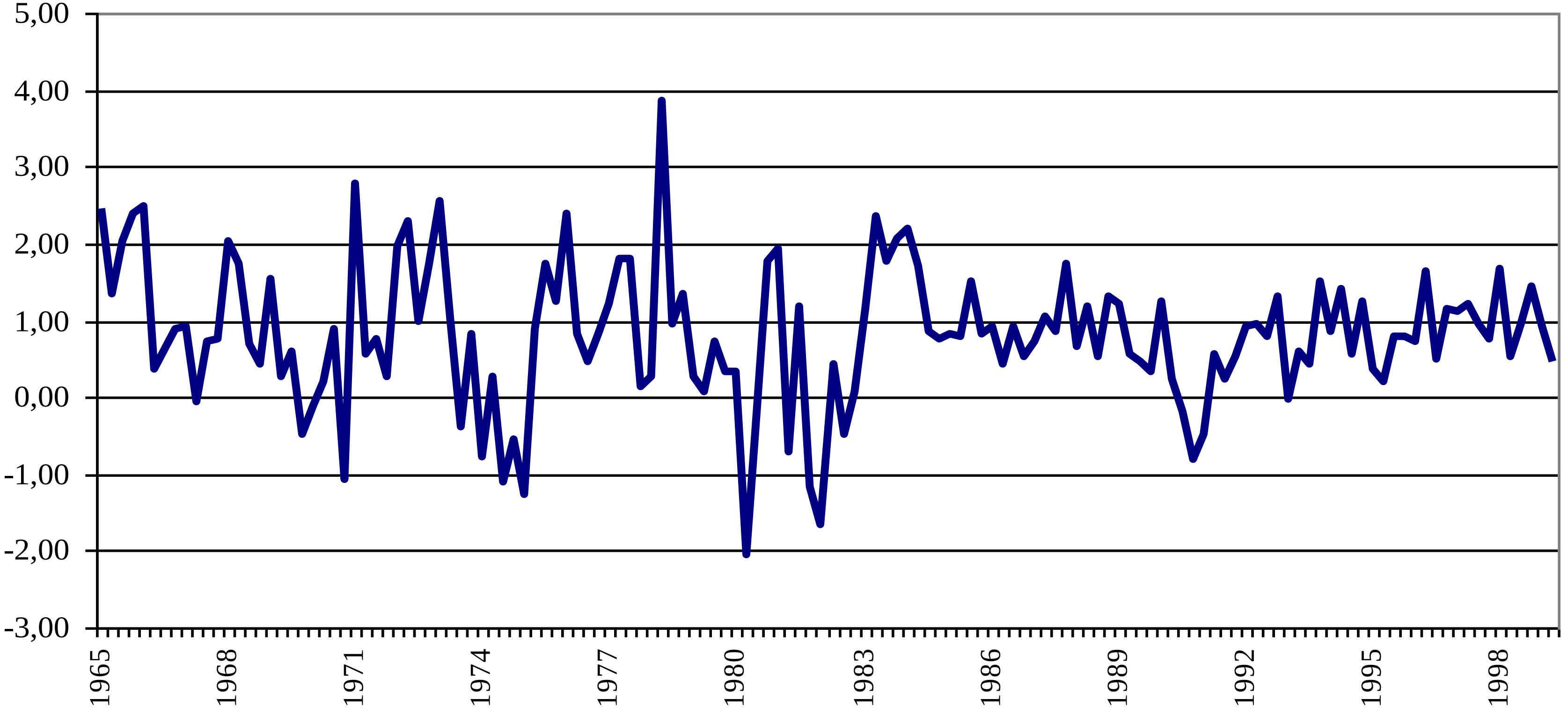


Period: I-1964 / II-1999

Source: *BEA*

At constant 1996 prices. Non Seasonally adjusted.

Quarterly variations US Gross Domestic Product



Period: I-1964 / II-1999

Source: *BEA*

At constant 1996 prices. Non Seasonally adjusted.

antoni.espasa@uc3m.es

X

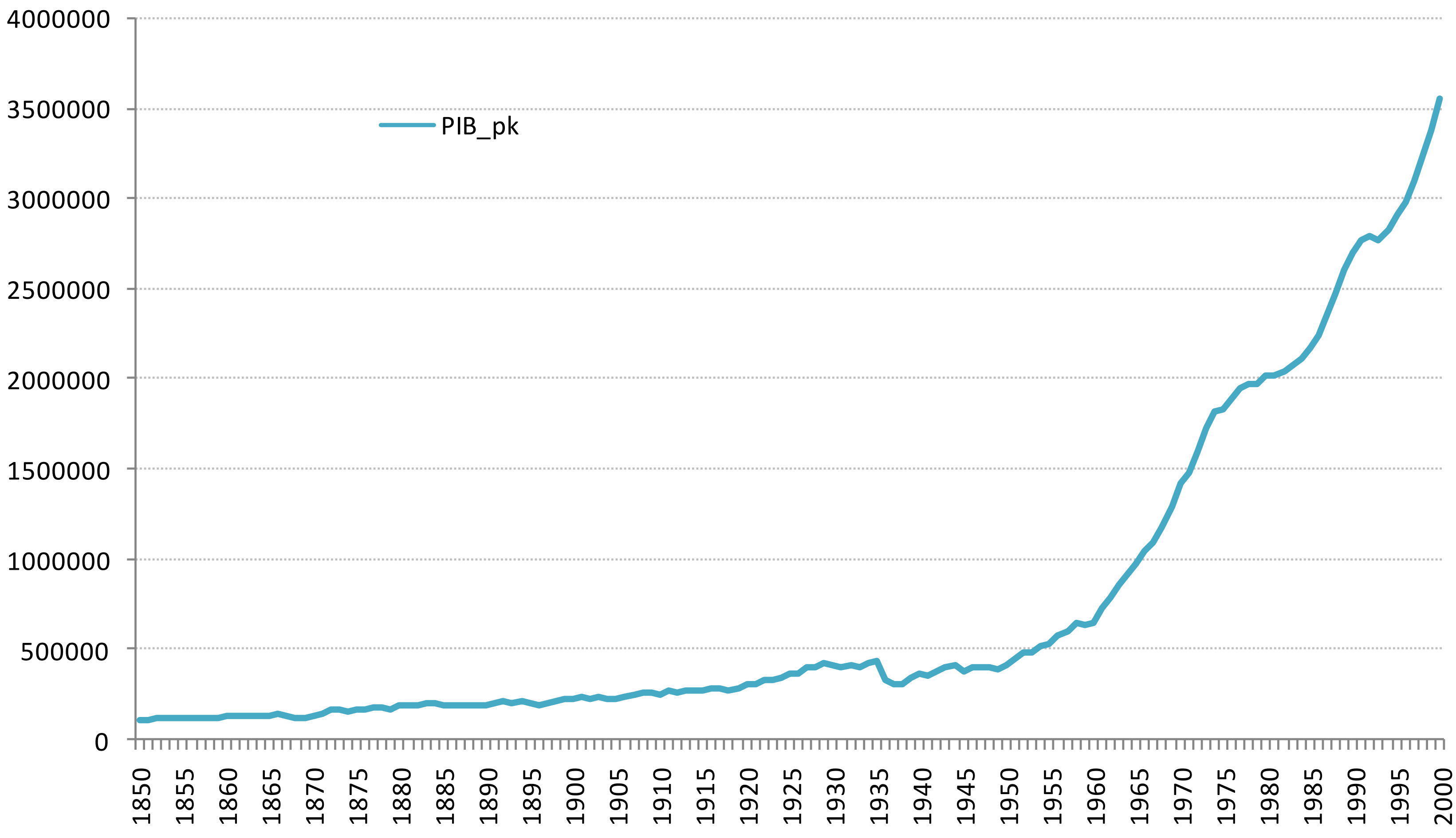
TENDENCIAS CON CRECIMIENTO NO CONSTANTE

En realidad los incrementos tecnológicos no tienen media constante.

Esta puede cambiar de tanto en tanto y tener en consecuencia una estructura segmentada. Una serie temporal con tales características se le denominará $I(1,1^s)$.

La serie histórica sobre el producto interior bruto de la economía española,elaborada por el Prof.Leandro Prados de la Escosura,es un buen ejemplo de ello.

PIB de España a precios constantes. 1850-2000

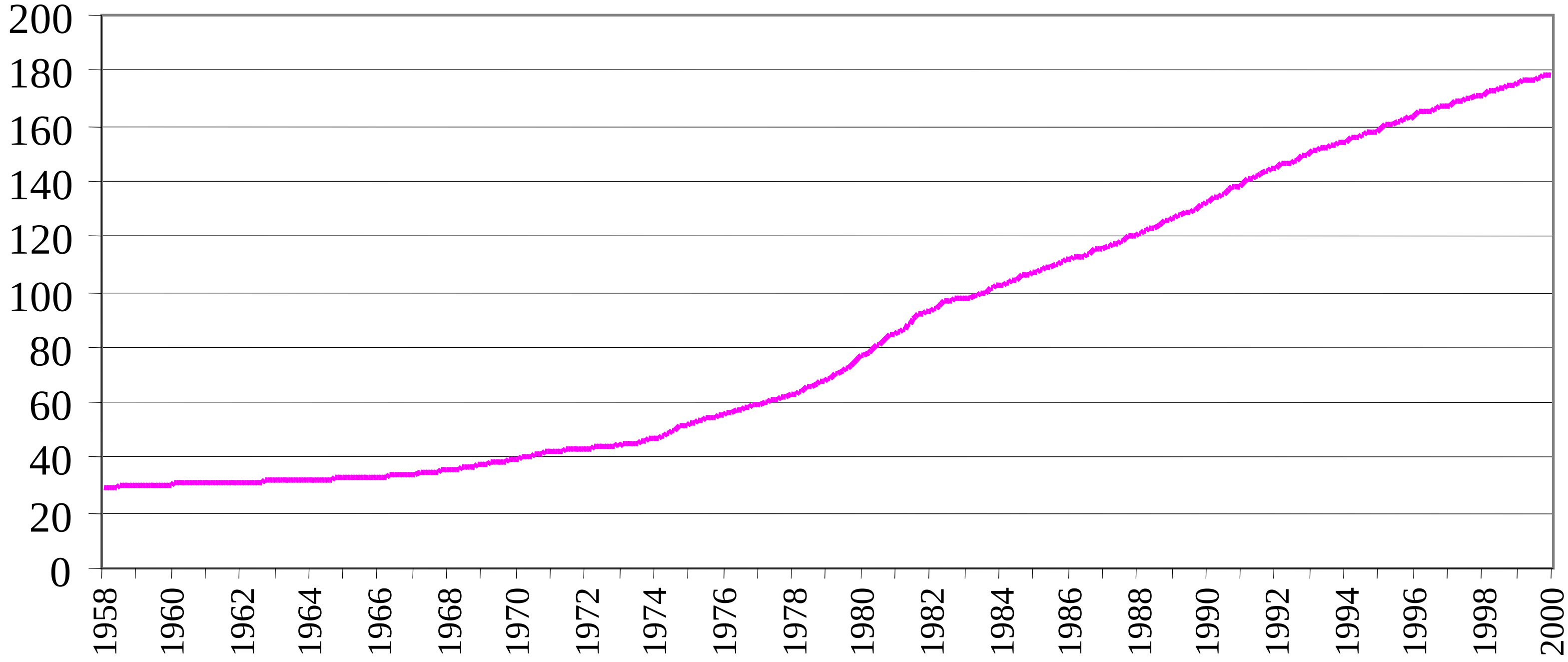


TENDENCIAS CON DOS RAICES UNITARIAS

En otros casos los cambios de media pueden ser más frecuentes y ellos mismos pueden seguir un esquema de raíz unitaria, que acumulada a la anterior genera tendencias con dos raíces unitarias y a las series con tales características se les denomina I(2,0).

Figura 23.6

Indice de Precios de Consumo Mensual USA sin alimentos y energía

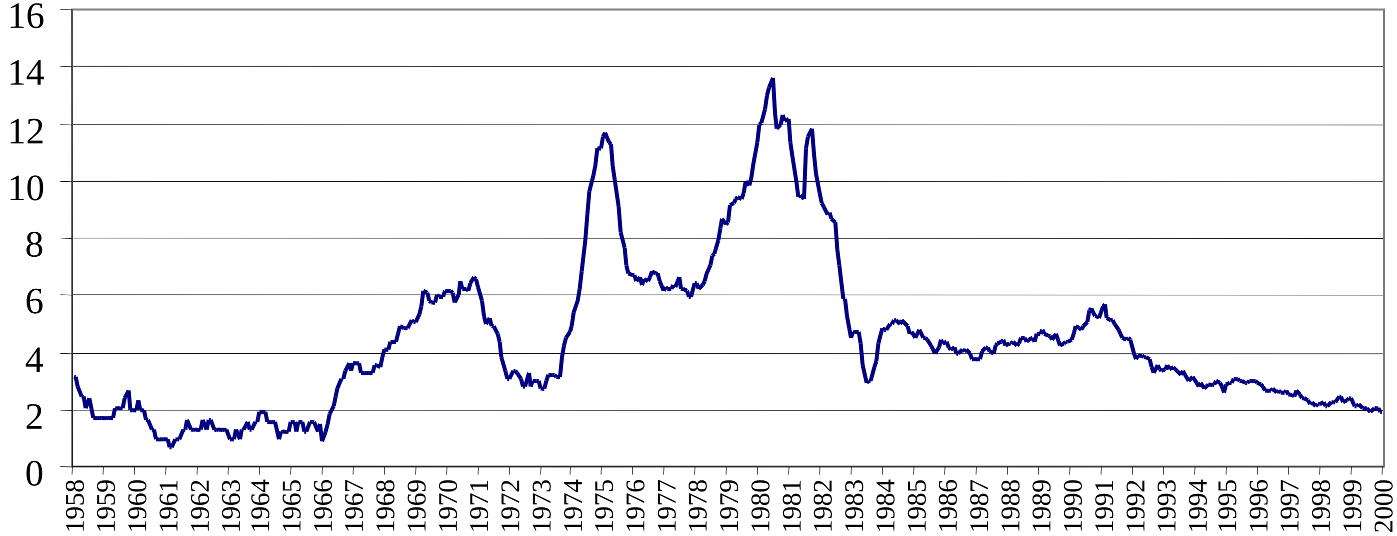


Período: 1958.01- 2000.01

Fuente: *BLS*

Figura 23.7

La inflación tendencial en USA



Período: 1958.01- 2000.01

Fuente: *BLS*

***** La inflación tendencial se ha definido como la tasa de crecimiento del índice de precios al consumo que se obtiene sin incluir los precios de los alimentos y la energía.
Aquí usamos la tasa de crecimiento interanual para medir la inflación tendencial.

LAS TENDENCIAS PLENAMENTE ESTOCÁSTICAS

- en $X_t = X_{t-1} + b + w_t$
  - el factor de nivel $\mathbf{X_{t-1}}$ es estocástico pero
  - el factor incremental **b** es determinista.
- **Un modelo con factor incremental estocástico** es

$$X_t = X_{t-1} + (X_{t-1} - X_{t-2}) + w_t \qquad (6)$$

- Tomando las primeras diferencias

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (X_{t-1} - X_{t-2}) + w_t, \qquad (7)$$

  de modo que en (7) ΔX_t aún tiene evolutividad y de hecho es I(1,0).
- Diferenciando de nuevo

$$\Delta^2 X_t = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) = w_t, \qquad (8)$$

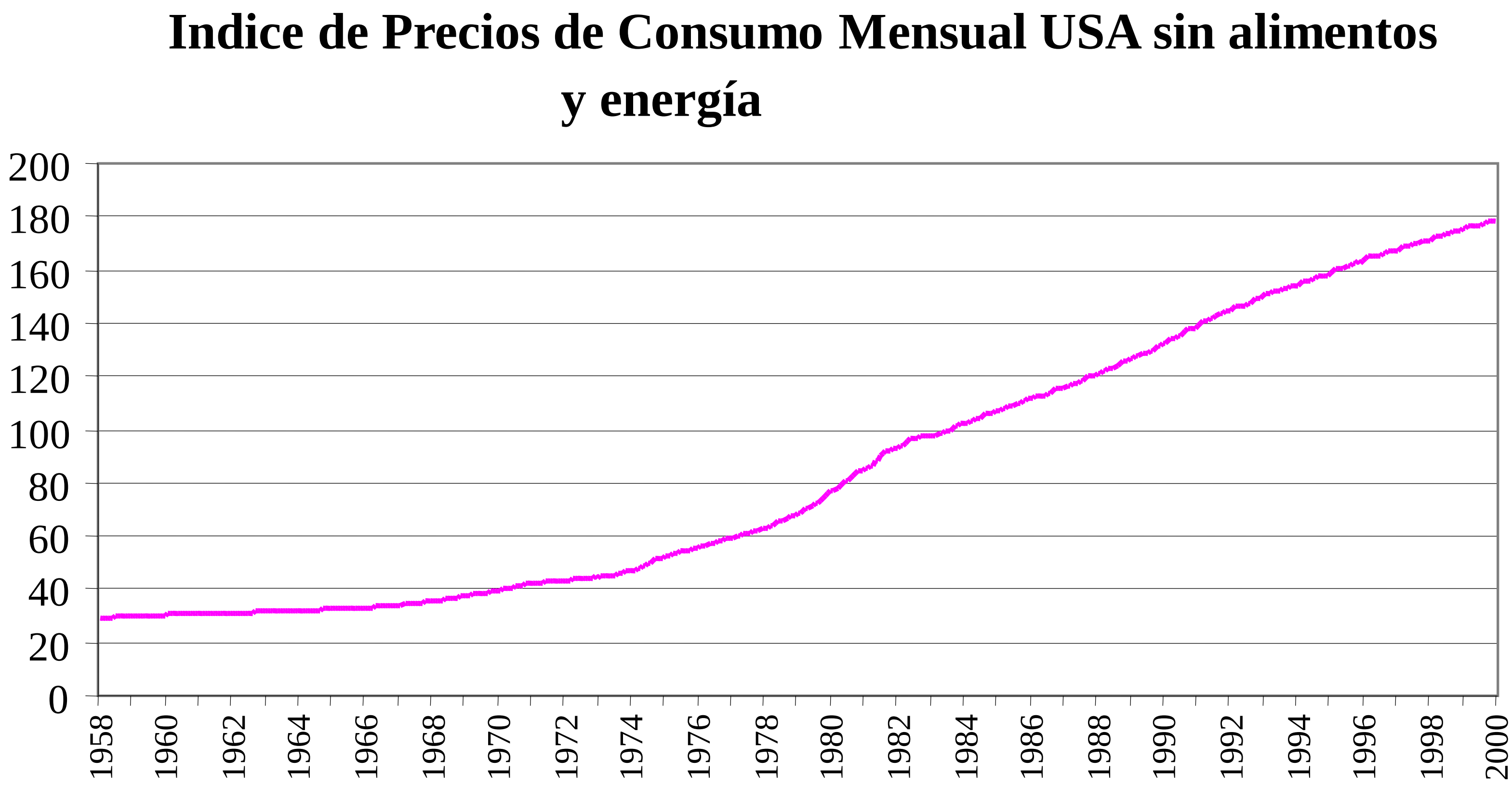
  w_t es estacionario.
- Así (6)

  $X_t \sim I(2,0)$ Con (6) se incluyen dos coeficientes unitarios(raices)

  $\Delta X_t \sim I(1,0)$

  $\Delta^2 X_t \sim I(0,0)$

Figura 23.6



Período: 1958.01- 2000.01

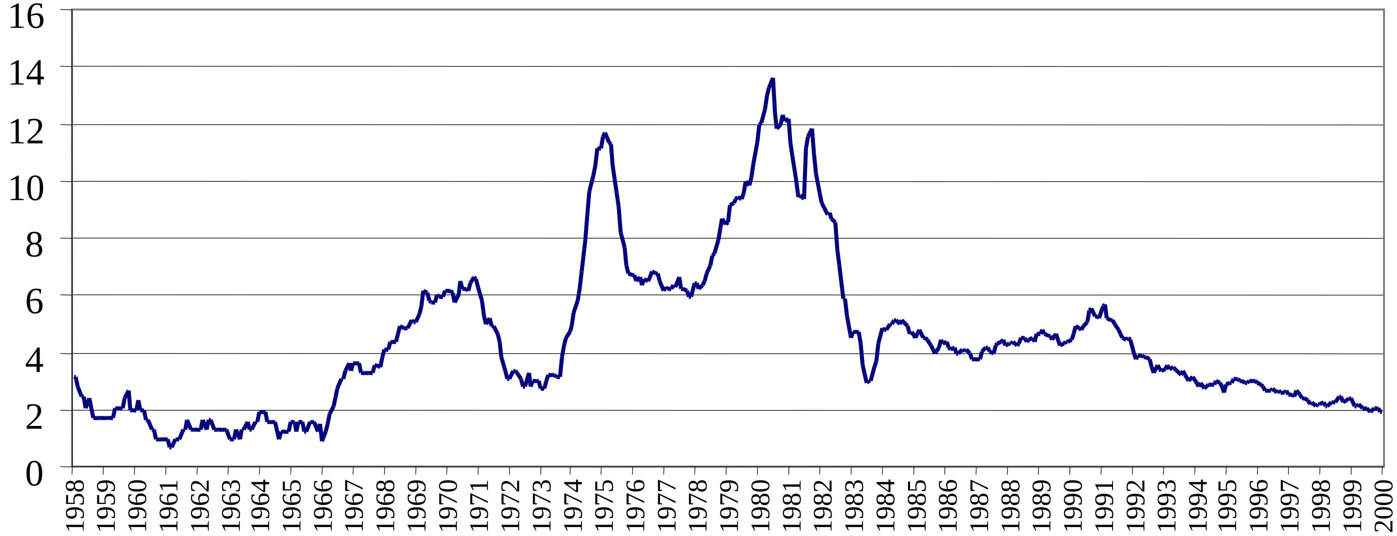
Fuente: *BLS*

INDICES DE PRECIOS E INFLACIÓN

- LOS INDICES PRECIOS ,O MÁS PRECISAMENTE, SU TRANSFORMACIÓN LOGARITMICA ,SUELEN SER SERIES I(2,0).
- EN CONSECUENCIA,LA INFLACIÓN –LAS PRIMERAS DIFERENCIAS DEL LOGARITMO DE LOS PRECIOS – SON SERIES I(1,0).
- LA INFLACIÓN TIENE EVOLUTIVIDAD DEL TIPO OSCILACIONES LOCALES DE NIVEL.
- **La transformación estacionaria** SE OBTIENE APLICANDO DOS VECES PRIMERAS DIFERENCIAS A LA TRANSFORMACIÓN LOGARÍTMICA DE LOS PRECIOS.

Figura 23.7

La inflación tendencial en USA

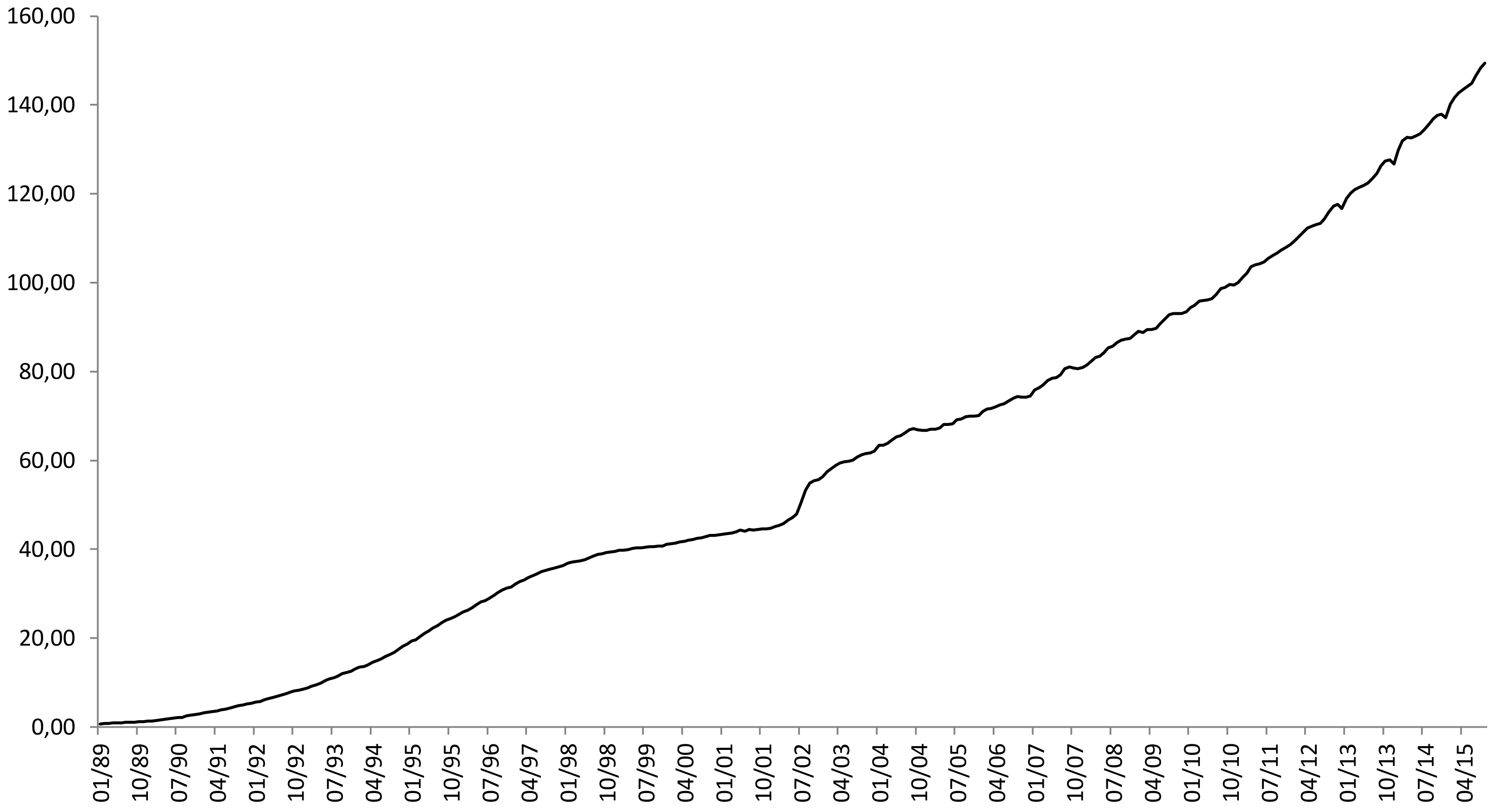


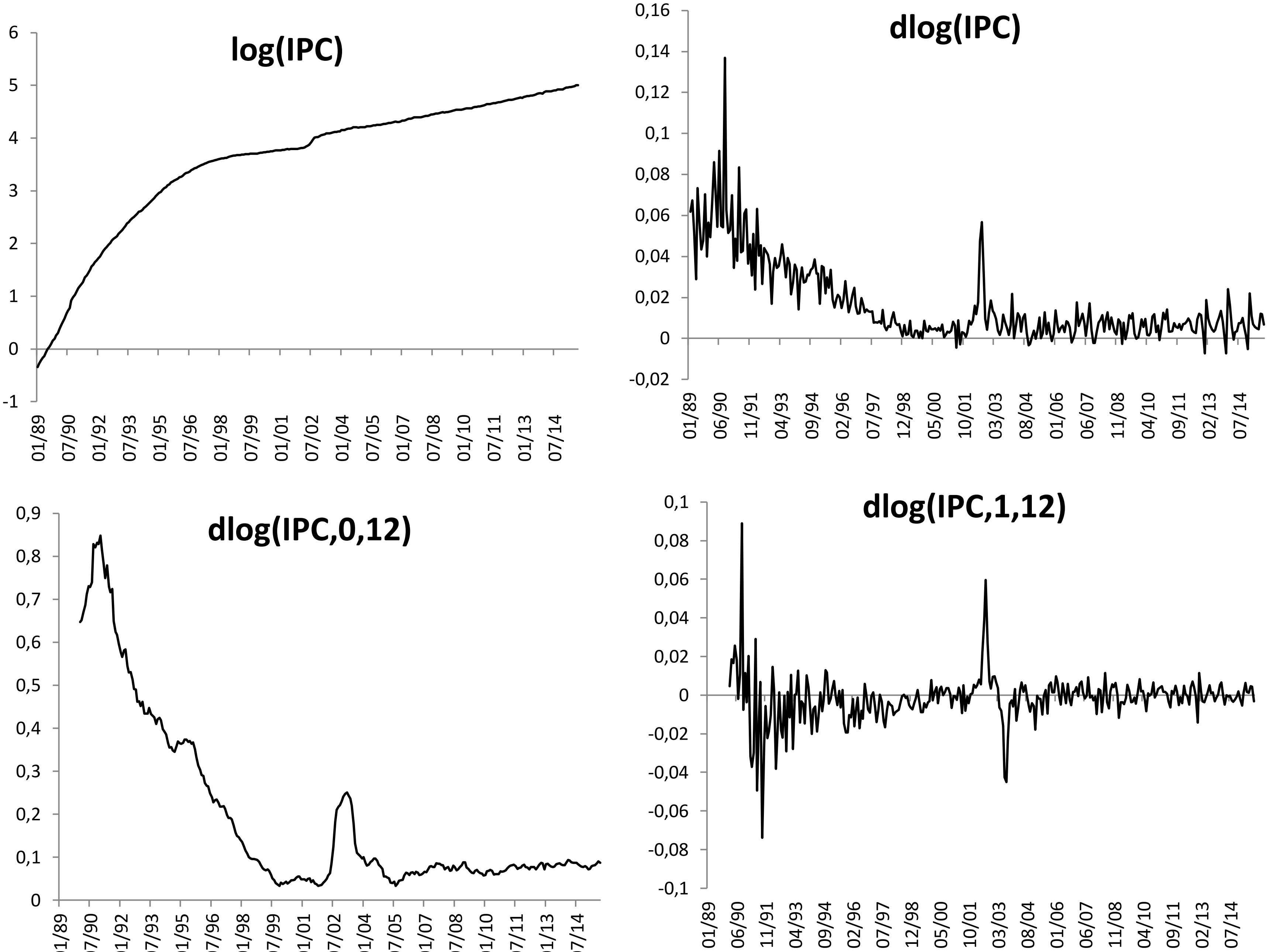
Período: 1958.01- 2000.01

Fuente: *BLS*

***** La inflación tendencial se ha definido como la tasa de crecimiento del índice de precios al consumo que se obtiene sin incluir los precios de los alimentos y la energía.
Aquí usamos la tasa de crecimiento interanual para medir la inflación tendencial.

Índice de Precios al Consumo (1989-2015) Fuente: INE

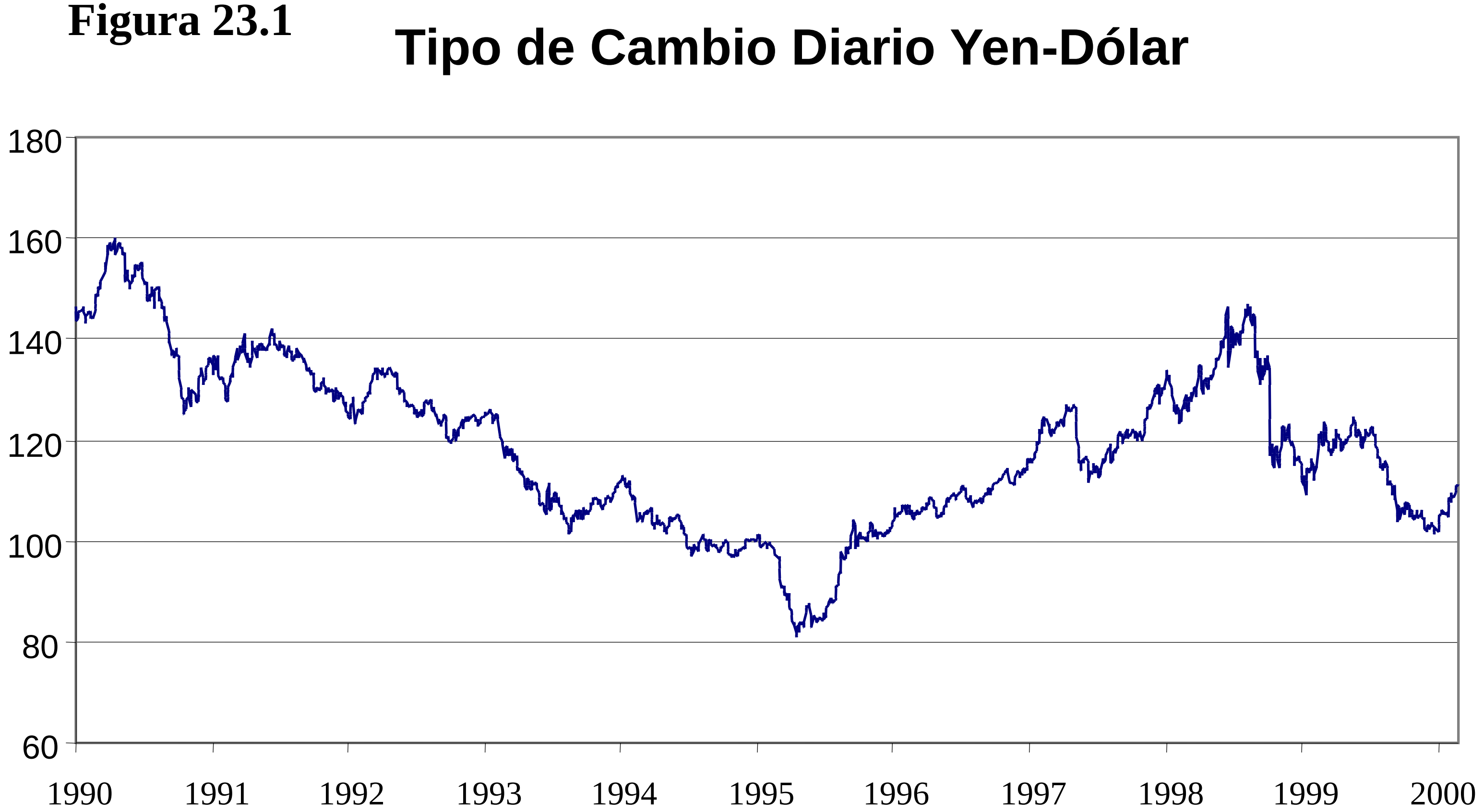



log(IPC)
6
5
4
3
2
1
0
-1
01/89
07/90
01/92
07/93
01/95
07/96
01/98
07/99
01/01
07/02
01/04
07/05
01/07
07/08
01/10
07/11
01/13
07/14
dlog(IPC)
0,16
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
01/89
06/90
11/91
04/93
09/94
02/96
07/97
12/98
05/00
10/01
03/03
08/04
01/06
06/07
11/08
04/10
09/11
02/13
07/14
dlog(IPC,0,12)
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
01/89
07/90
01/92
07/93
01/95
07/96
01/98
07/99
01/01
07/02
01/04
07/05
01/07
07/08
01/10
07/11
01/13
07/14
dlog(IPC,1,12)
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,1
01/89
06/90
11/91
04/93
09/94
02/96
07/97
12/98
05/00
10/01
03/03
08/04
01/06
06/07
11/08
04/10
09/11
02/13
07/14

RESUMEN DE DIFERENTES ESTRUCTURAS TENDENCIALES CON RAÍZ UNITARIA

- 1.- **I(1,0)**: genera OLN. Ejemplo tipo de cambio. Sus primeras diferencias son I(0.0), oscilan alrededor de una media cero..
- 2.- **I(1.1):** genera crecimiento sistemático con una media de crecimiento constante. Ejemplo el PIB USA. Sus primeras diferencias son I(0.1), oscilan alrededor de una media distinta de cero.
- 3.- **I(1,1^s)**: genera crecimiento sistemático con una media segmentada. Ejemplo PIB histórico español. Sus primeras diferencias son I(0,1^s) oscilan alrededor de una media segmentada.
- 4.- **I(2,0)**: genera crecimiento sistemático con crecimiento no estacionario. Ejemplo el IPC. Sus primeras diferencias son I(1,0), tienen OLN. La transformación estacionaria se obtiene diferenciando dos veces. Esta serie estacionaria oscila alrededor de una media cero.

Figura 23.1

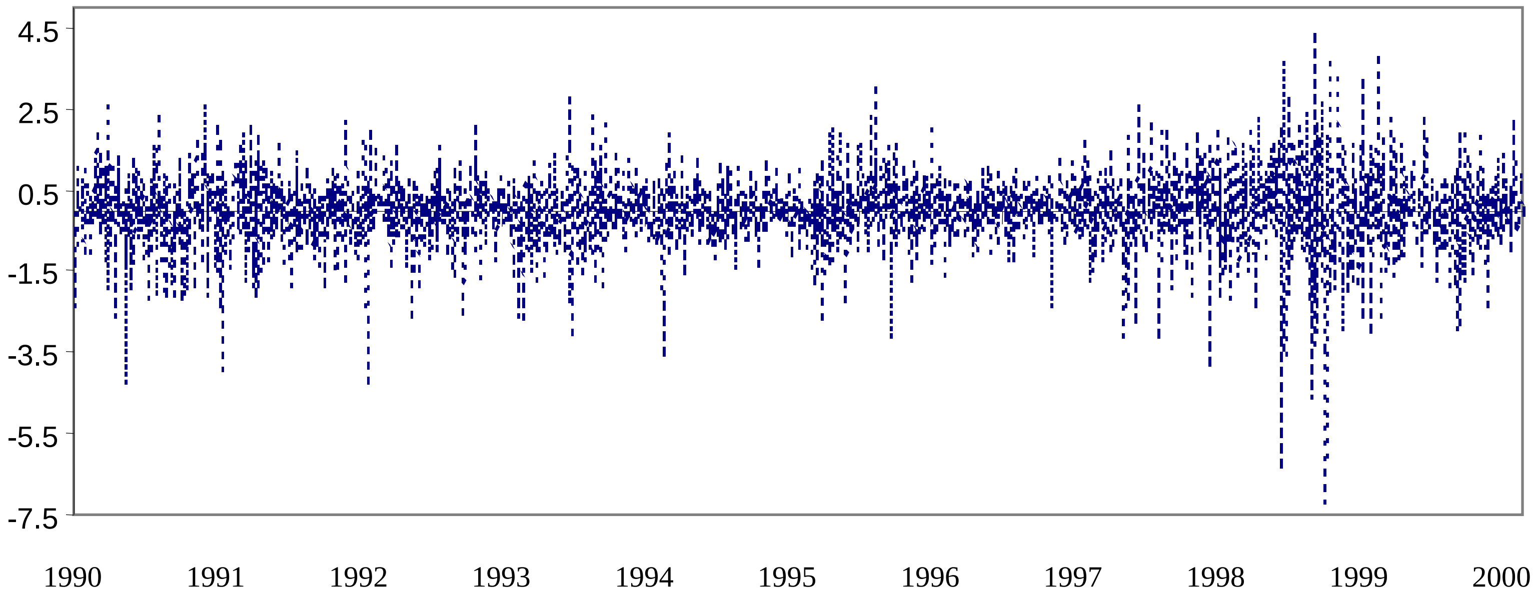


Período: 2/01/1990 -25/02/2000

Fuente: *FRED (Federal Reserve Economic Data)*

Figura 23.2

Variaciones Diarias en el Tipo de Cambio Yen-Dólar

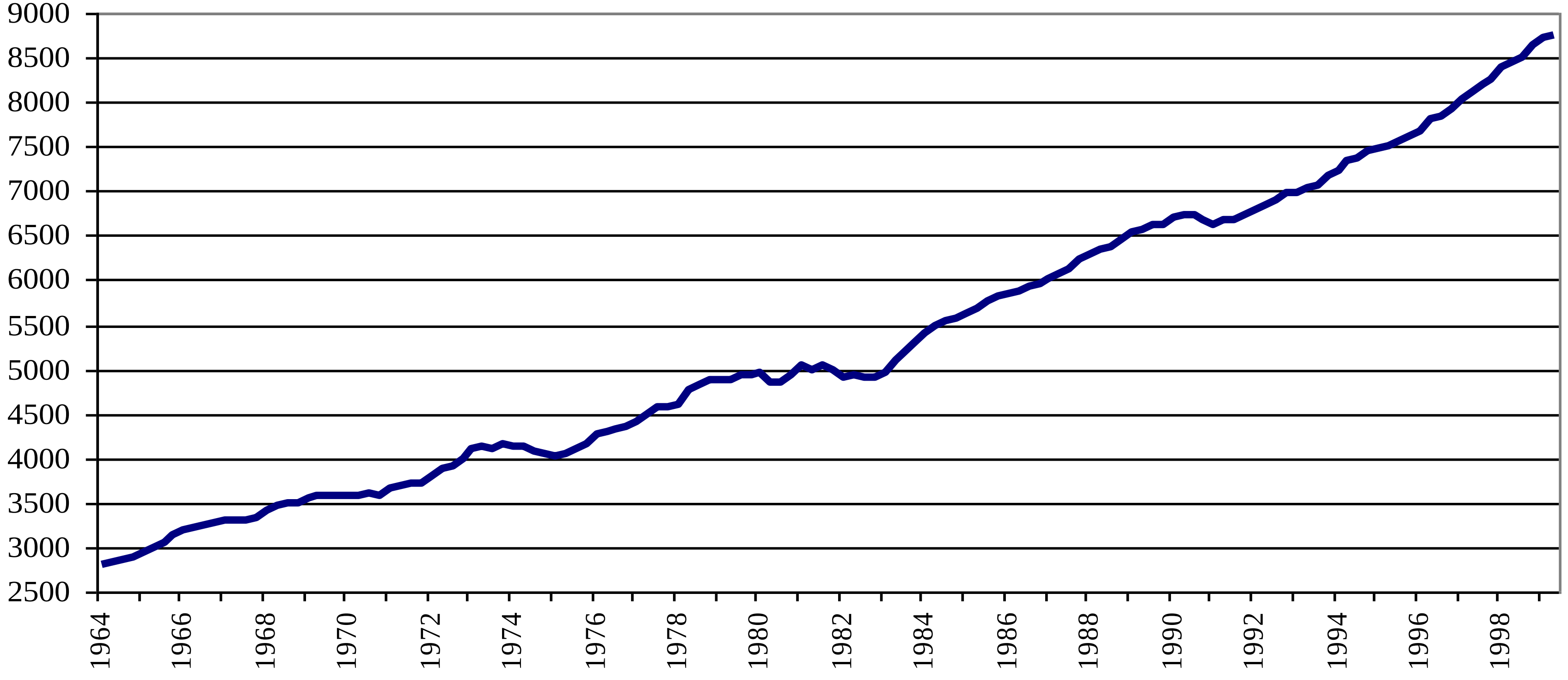


Período: 2/01/1990 - 25/02/2000

Fuente: *FRED (Federal Reserve Economic Data)*

Figure 2.12

Quarterly US Real Gross Domestic Product ($X9_t$)

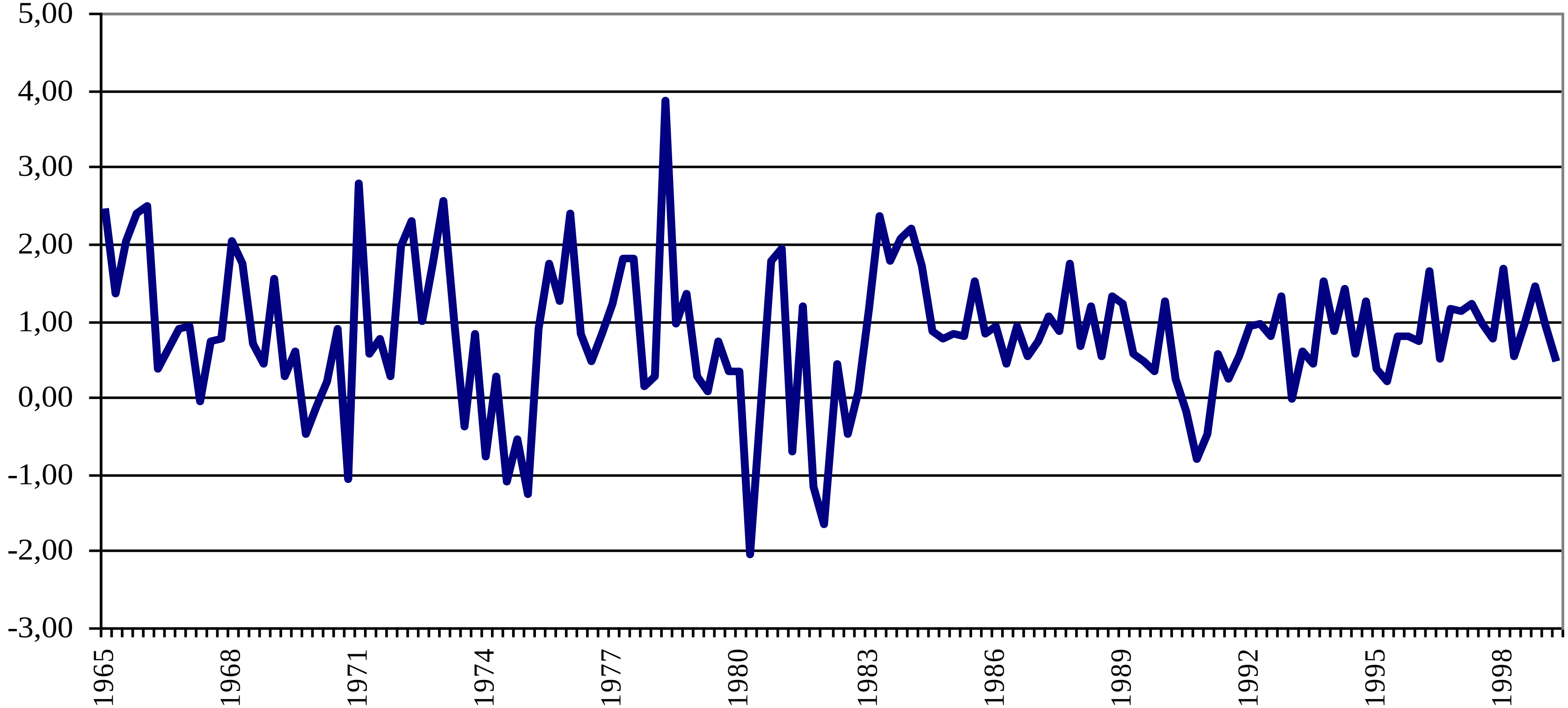


Period: I-1964 / II-1999

Source: *BEA*

At constant 1996 prices. Non Seasonally adjusted.

Quarterly variations US Gross Domestic Product



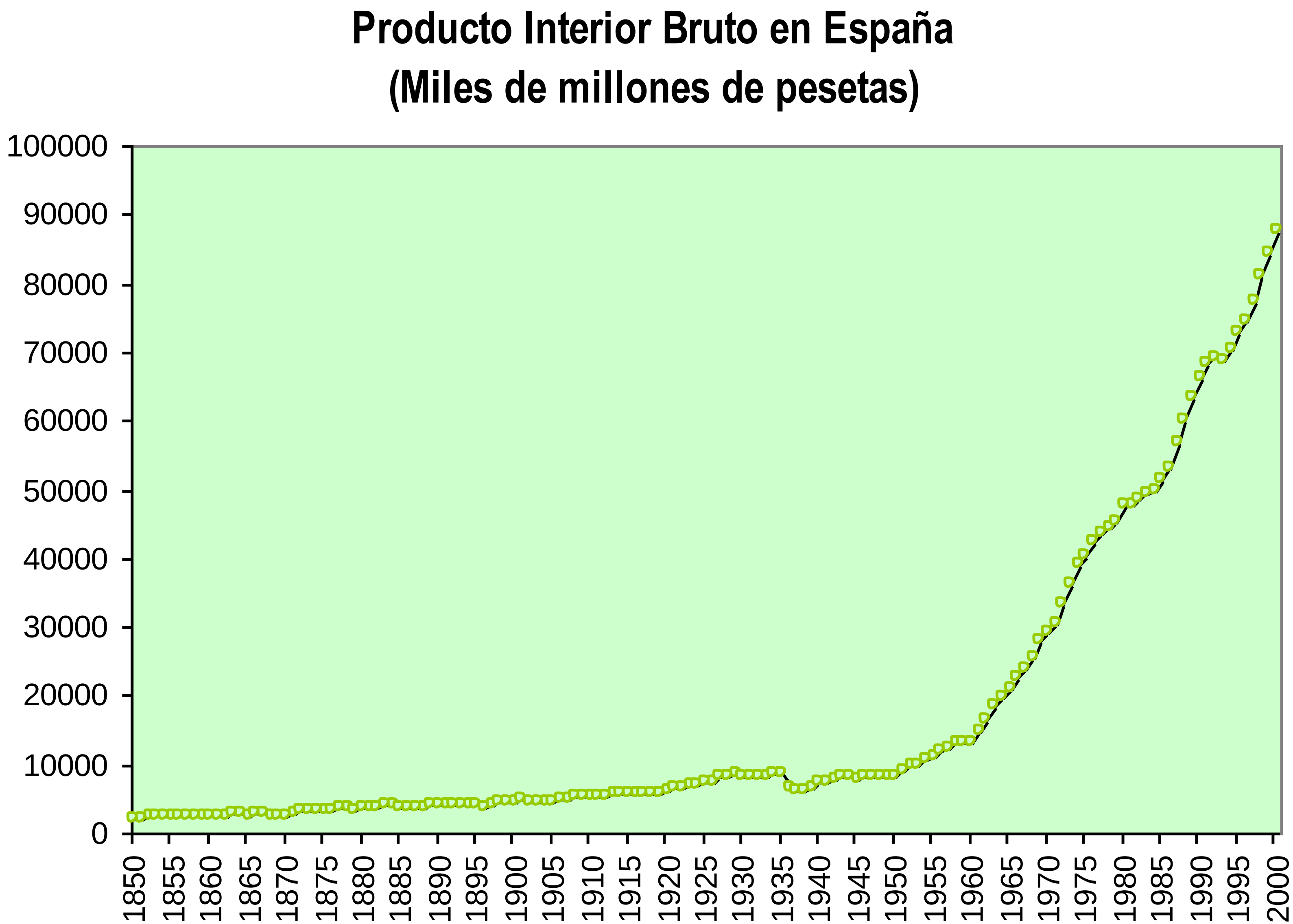
Period: I-1964 / II-1999

Source: *BEA*

At constant 1996 prices. Non Seasonally adjusted.

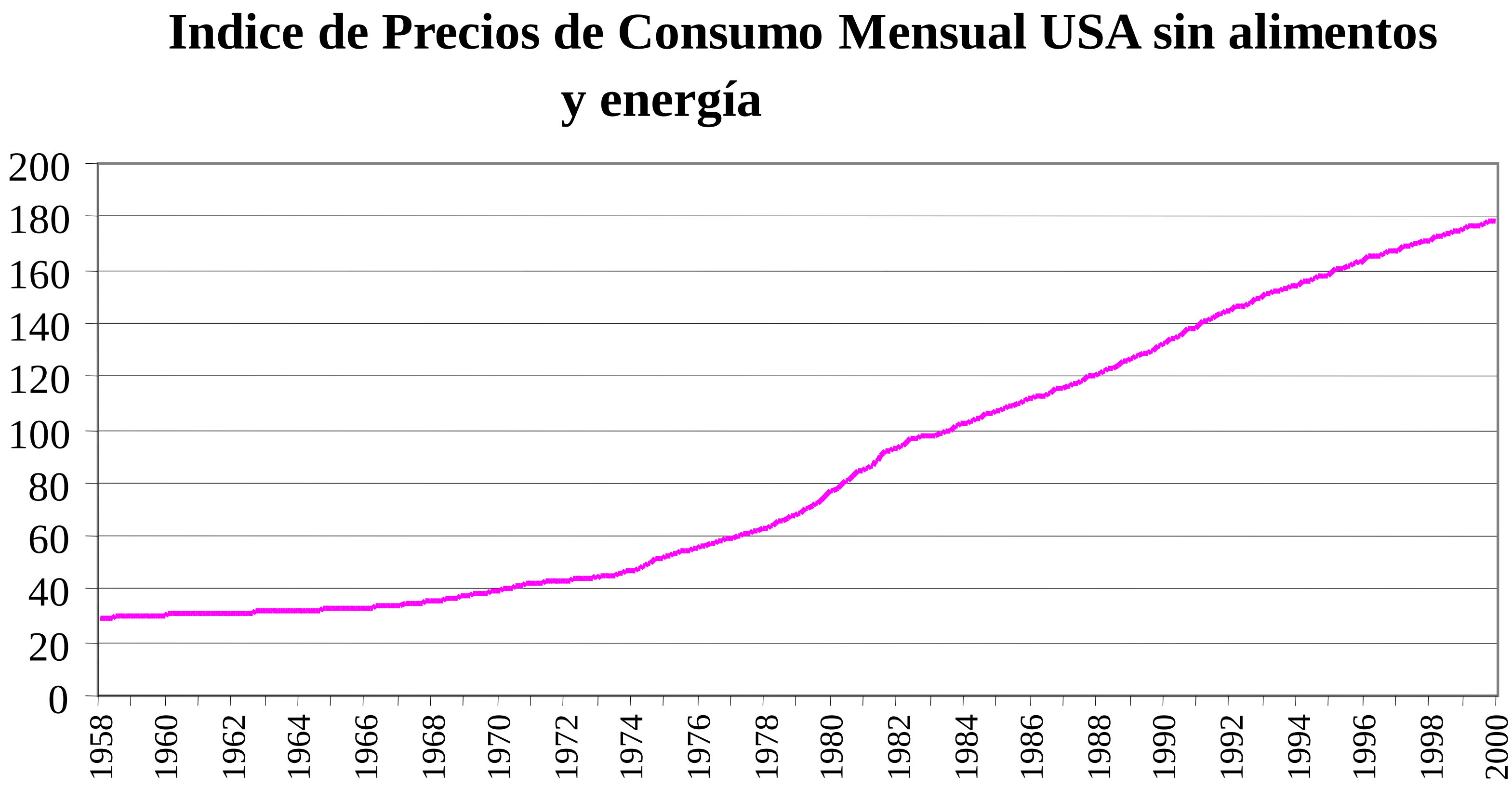
X

Series Anuales



X

Figura 23.6

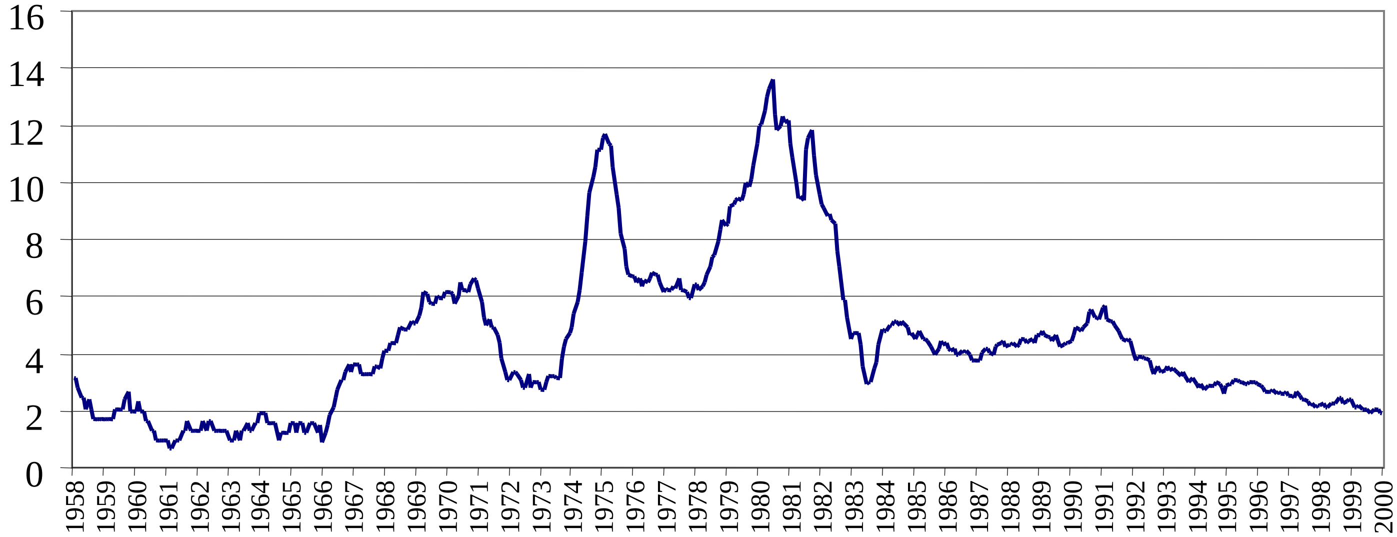


Período: 1958.01- 2000.01

Fuente: *BLS*

Figura 23.7

La inflación tendencial en USA



Período: 1958.01- 2000.01

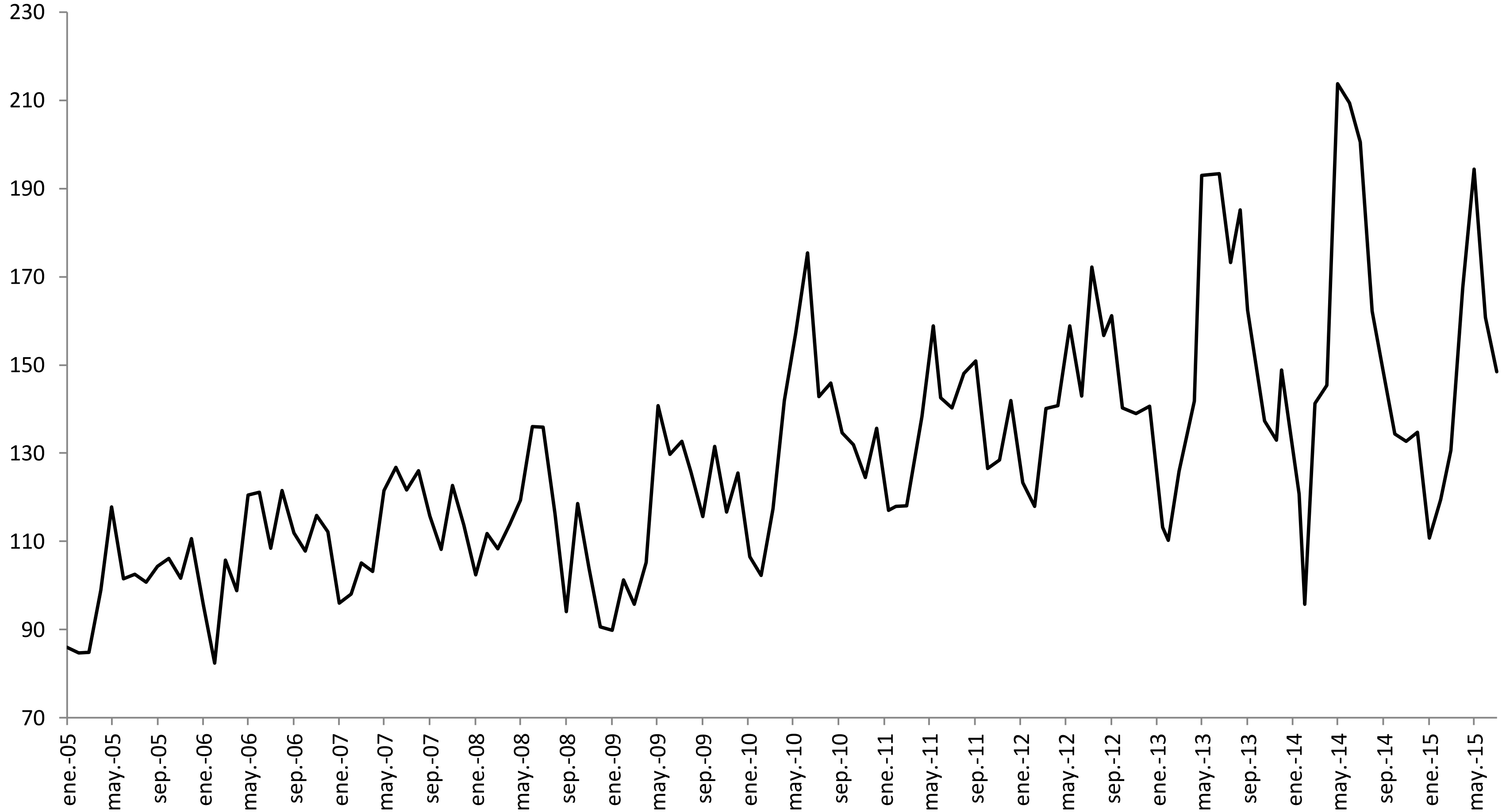
Fuente: *BLS*

***** La inflación tendencial se ha definido como la tasa de crecimiento del índice de precios al consumo que se obtiene sin incluir los precios de los alimentos y la energía.
Aquí usamos la tasa de crecimiento interanual para medir la inflación tendencial.

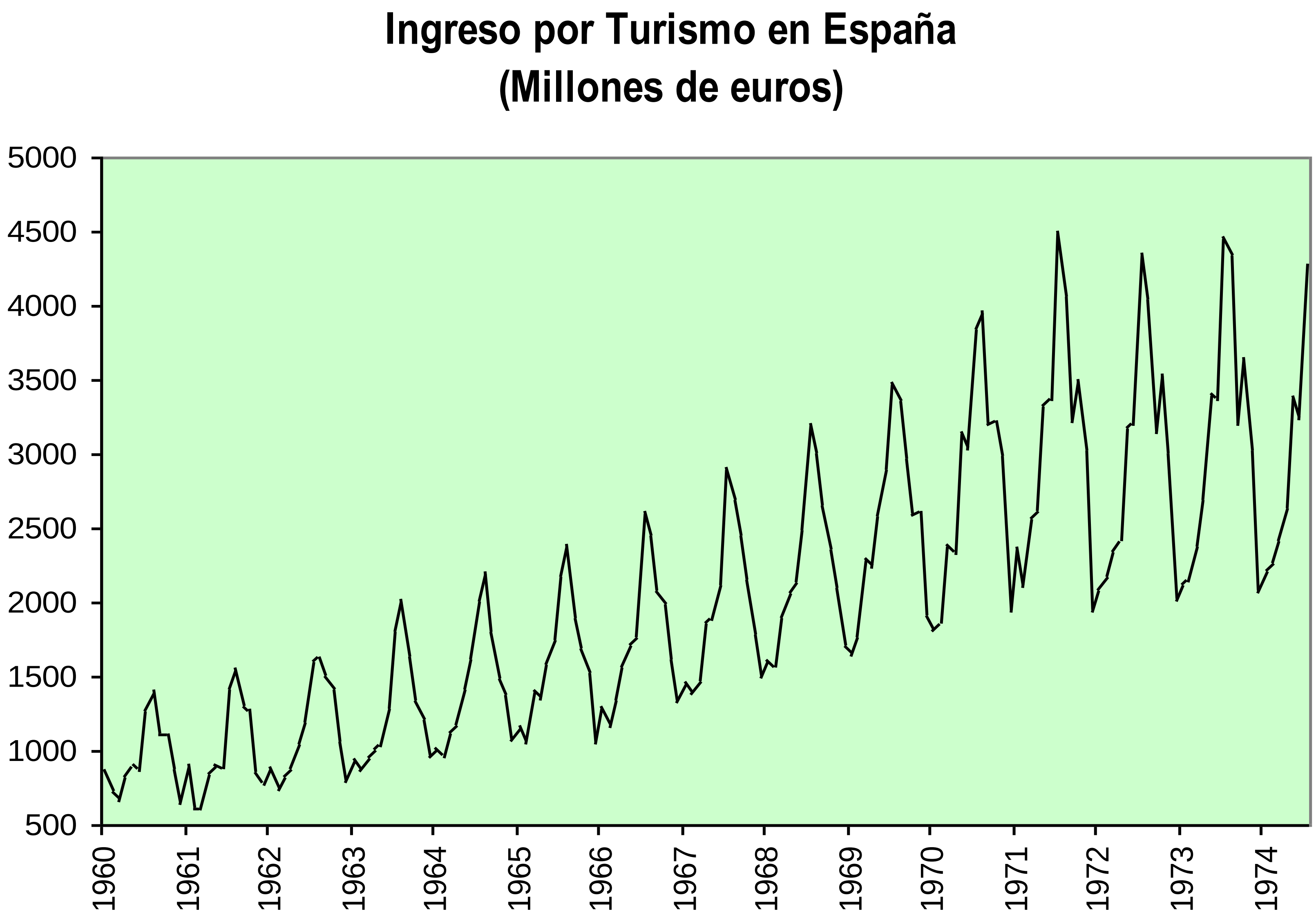
Modelización estocástica de la estacionalidad.

antoni.espasa@uc3m.es

IVF Exportaciones (2005-2015) Fuente:INE



Series Mensuales



antoni.espasa@uc3m.es

X

- De nuevo los factores meterológicos, sociales y administrativos que causan la estacionalidad son estocásticos y ésta se puede representar mediante ecuaciones en diferencias finitas estocásticas con persistencia cíclica.

- Cuando este tipo de estacionalidad aparece junto con una tendencia estocástica se tiene que una de las raíces unitarias del esquema resultante no es sobre el pasado inmediato, sino sobre el mismo periodo (estación) del año inmediatamente anterior

SERIES CON ESTACIONALIDAD ESTOCÁSTICA Y TENDENCIA I (1)

I(1,0) EE

Tienen oscilaciones locales de nivel estocástico y estacionalidad estocástica:

$$X_t = X_{t-s} + \omega_t \qquad (5)$$

En (5) hay una raíz unitaria (coeficiente de X_{t-1})pero sobre el pasado "estacional" (el mismo periodo del año anterior) por lo que la serie es i(1,0) EE

Tomando una diferencia estacional la serie X_t se convierte en estacionaria:

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s} = \omega_t \qquad (6)$$

OBSERVESE QUE

$$X_{t-s} = X_{t-1} - [\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t-2} + \ldots + \Delta X_{t-s+1}] \qquad (1)$$

En (1):- Xt-1 recoge el nivel en (t-1): FACTOR TENDENCIAL y

- el término entre paréntesis [..], recoge la suma con signo cambiado de crecimiento en los demás puntos estacionales del año: FACTOR ESTACIONAL

(1) señala la obviedad de que todo valor en un pasado algo lejano (t-s) es igual al valor pasado inmediato (t-1) menos los incrementos producidos entre ambos momentos.

antoni.espasa@uc3m.es

SERIES I(1,1)EE

*Estas series tienen una tendencia con crecimiento sistemático en el que el **nivel es estocástico**, pero **el crecimiento es determinista**. Además tienen estacionalidad estocástica:*

$$X_t = X_{t-s} + b + \omega_t \qquad (7)$$

Las diferencias anuales:

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s} = b + \omega_t = \omega_t{}^* \qquad (8)$$

Son estacionarias pero tienen crecimiento medio ≠ 0

Modelo para ΔX_t en (7)

- Hagamos b=s.c.
- Observese que

$$X_{t-s} = X_{t-1} + c - [\Delta X_{t-1} - c + \Delta X_{t-2} - c + \ldots + \Delta X_{t-s+1} - c]$$

- Entonces

$$X_t = w_t + X_{t-1} + c - [(\Delta X_{t-1} - c) + (\Delta X_{t-2} - c) + \ldots + (\Delta X_{t-s+1} - c)]$$

SERIES I(2,0)EE

Tienen crecimiento sistemático con **nivel y crecimiento estocásticos**. Además la estacionalidad es estocástica:

$$X_t = X_{t-1} + (X_{t-s} - X_{t-s-1}) + \omega_t \qquad (9)$$

En ellas:

$$\Delta X_t : I(1,0)EE$$

$$\Delta_s X_t : I(1,0) \text{ sin estacional idad}$$

$$\Delta\Delta_s X_t = Wt$$ estacionaria

OBSERVESE QUE

$$X_{t-s} = X_{t-1} - [\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t-2} + \ldots + \Delta X_{t-s+1}] \qquad (1)$$

En (1):- Xt-1 recoge el nivel en (t-1): FACTOR TENDENCIAL y

- el término entre paréntesis [..], recoge la suma con signo cambiado de crecimiento en los demás puntos estacionales del año: FACTOR ESTACIONAL

(1) señala la obviedad de que todo valor en un pasado algo lejano (t-s) es igual al valor pasado inmediato (t-1) menos los incrementos producidos entre ambos momentos.

STOCHASTIC SEASONALITY AND STOCHASTIC GROWTH

- Now the equivalent equation (24) is

$$\Delta X_t - \Delta X_{t-1} = -(L + \ldots + L^{s-1})[\Delta X_t - \Delta X_{t-1}] + W_t, \tag{28}$$

$$\Delta(1-L)X_t = -(L + \ldots + L^{s-1})[\Delta(1-L)X_t] + W_t, \tag{29}$$

$$\Delta^2(1 + L + \ldots + L^{s-1})X_t = W_t \tag{30}$$

$$\Delta\Delta U_{s-1}(L)X_t = W_t \tag{31}$$

$$\boxed{\Delta\Delta_s X_t = W_t} \tag{32}$$

- Equation (32) can also be written as

$$X_t = \underbrace{X_{t-1} + \Delta X_{t-1}}_{\text{Component associated with trend}} - \underbrace{\{LU_{s-1}(L)[\Delta X_t - \Delta X_{t-1}]\}}_{\text{Component associated with seasonal cycle}} + W_t. \tag{32'}$$

antoni.espasa@uc3m.es

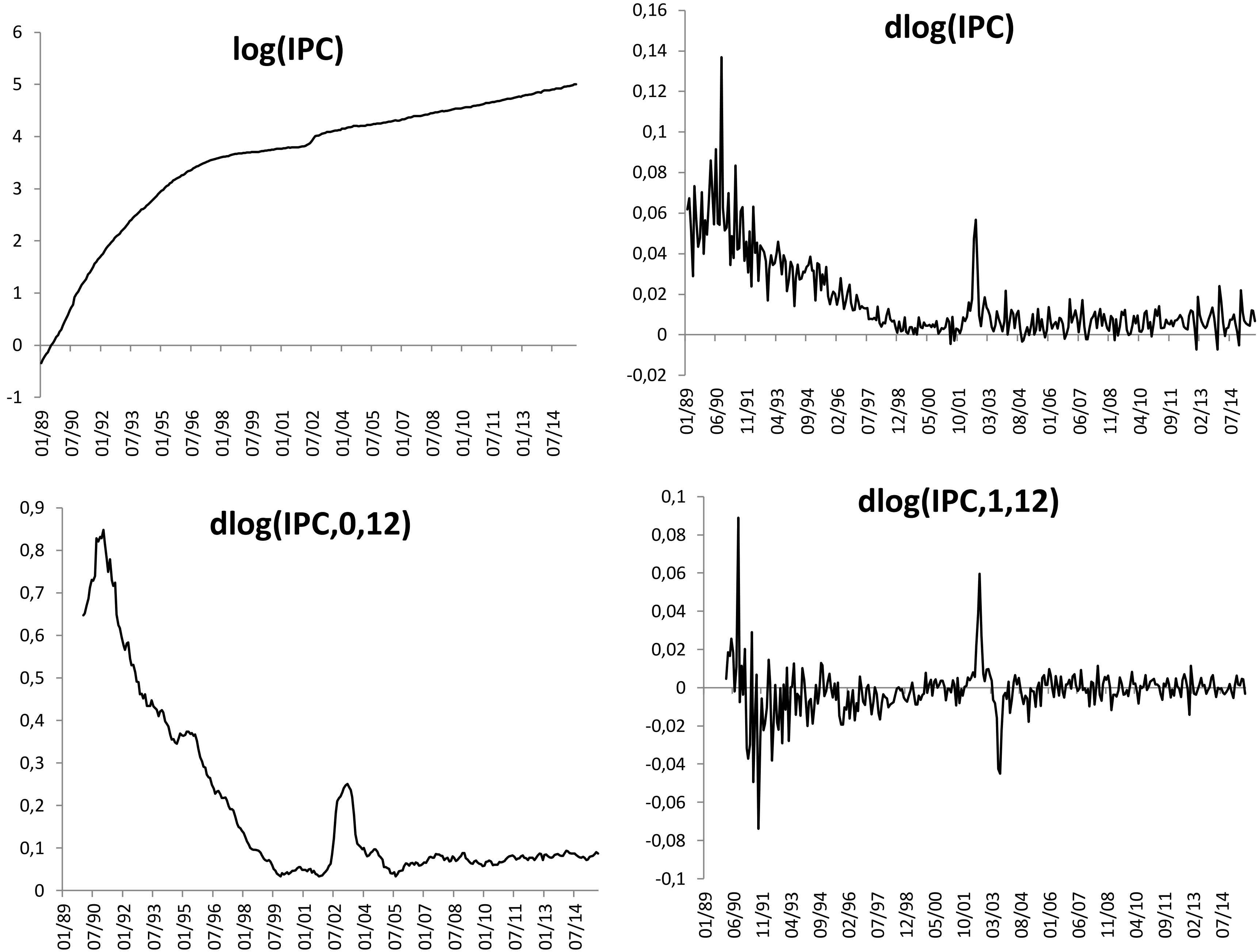
También

$$\Delta X_{t-s} = \Delta X_{t-1} - [\Delta^2 X_{t-1} + \ldots + \Delta^2 X_{t-s+1}] \qquad (2)$$

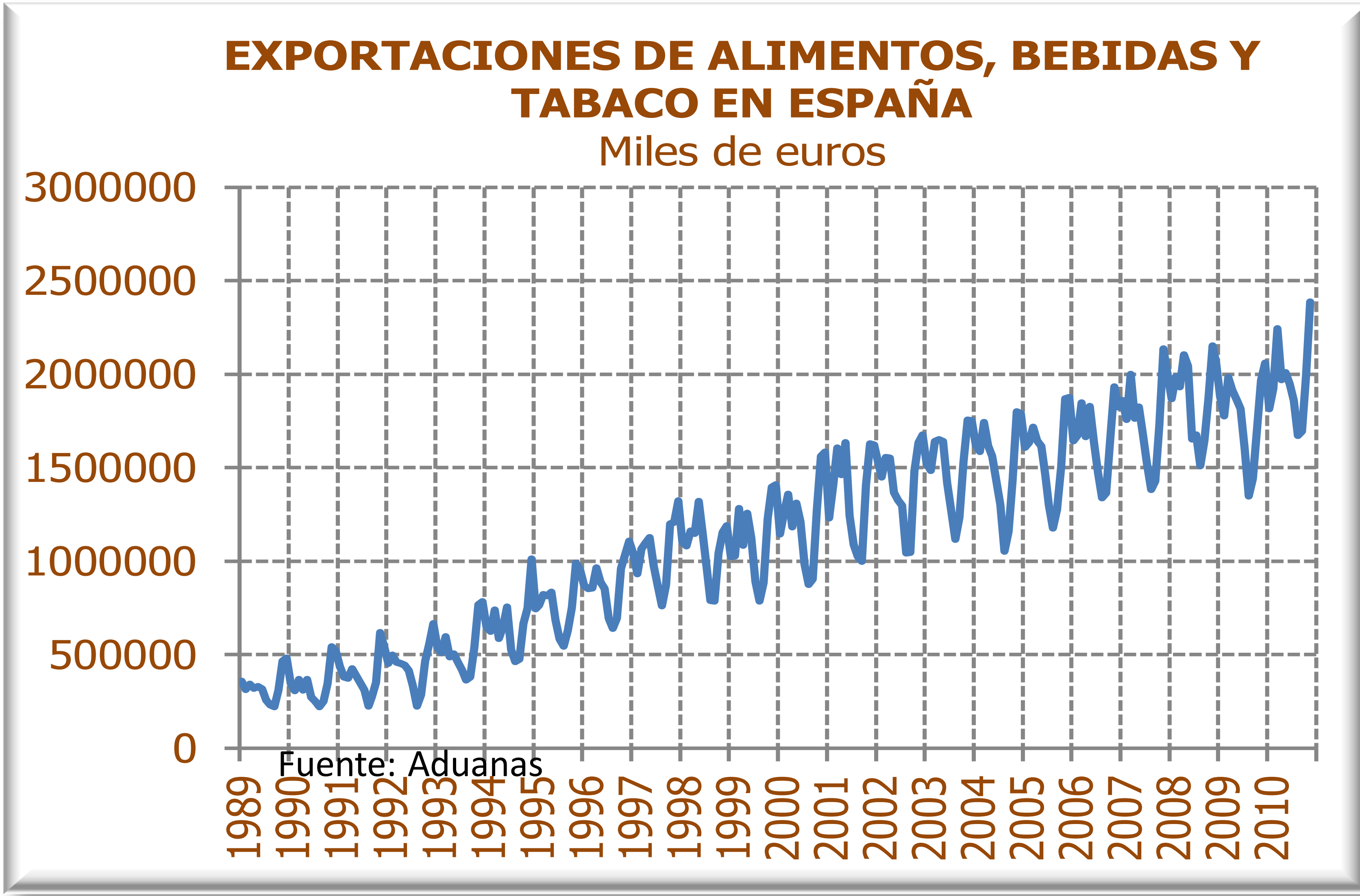
Siendo ΔX_{t-1} el **factor de crecimiento**, el término entre paréntesis el **factor estacional**

TENDENCIA I(2) CON ESTACIONALIDAD ESTOCASTICA (EE)

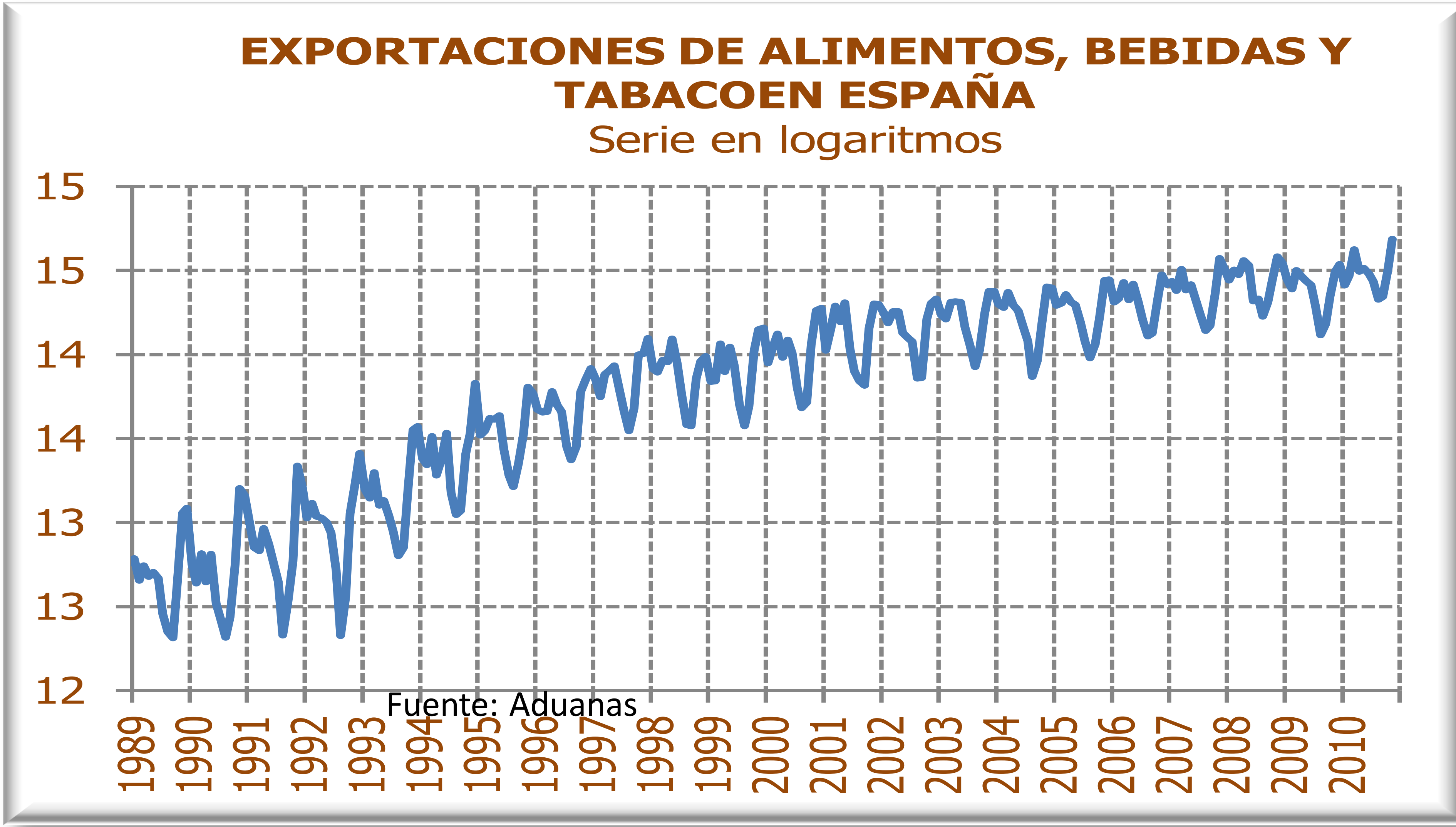
- $X_t = X_{t-1} + (X_{t-12} – X_{t-13}) + W_t$.
- La serie original X_t (o en logs) es I(2,0)EE
- La serie en primeras diferencias es I(1,0)EE
- La serie en diferencias anuales es I(1,0)sin estacionalidad.
- La serie con una diferenciación estacional y una regular es estacionaria.


log(IPC)
6
5
4
3
2
1
0
-1
01/89
07/90
01/92
07/93
01/95
07/96
01/98
07/99
01/01
07/02
01/04
07/05
01/07
07/08
01/10
07/11
01/13
07/14
dlog(IPC)
0,16
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
01/89
06/90
11/91
04/93
09/94
02/96
07/97
12/98
05/00
10/01
03/03
08/04
01/06
06/07
11/08
04/10
09/11
02/13
07/14
dlog(IPC,0,12)
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
01/89
07/90
01/92
07/93
01/95
07/96
01/98
07/99
01/01
07/02
01/04
07/05
01/07
07/08
01/10
07/11
01/13
07/14
dlog(IPC,1,12)
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,1
01/89
06/90
11/91
04/93
09/94
02/96
07/97
12/98
05/00
10/01
03/03
08/04
01/06
06/07
11/08
04/10
09/11
02/13
07/14

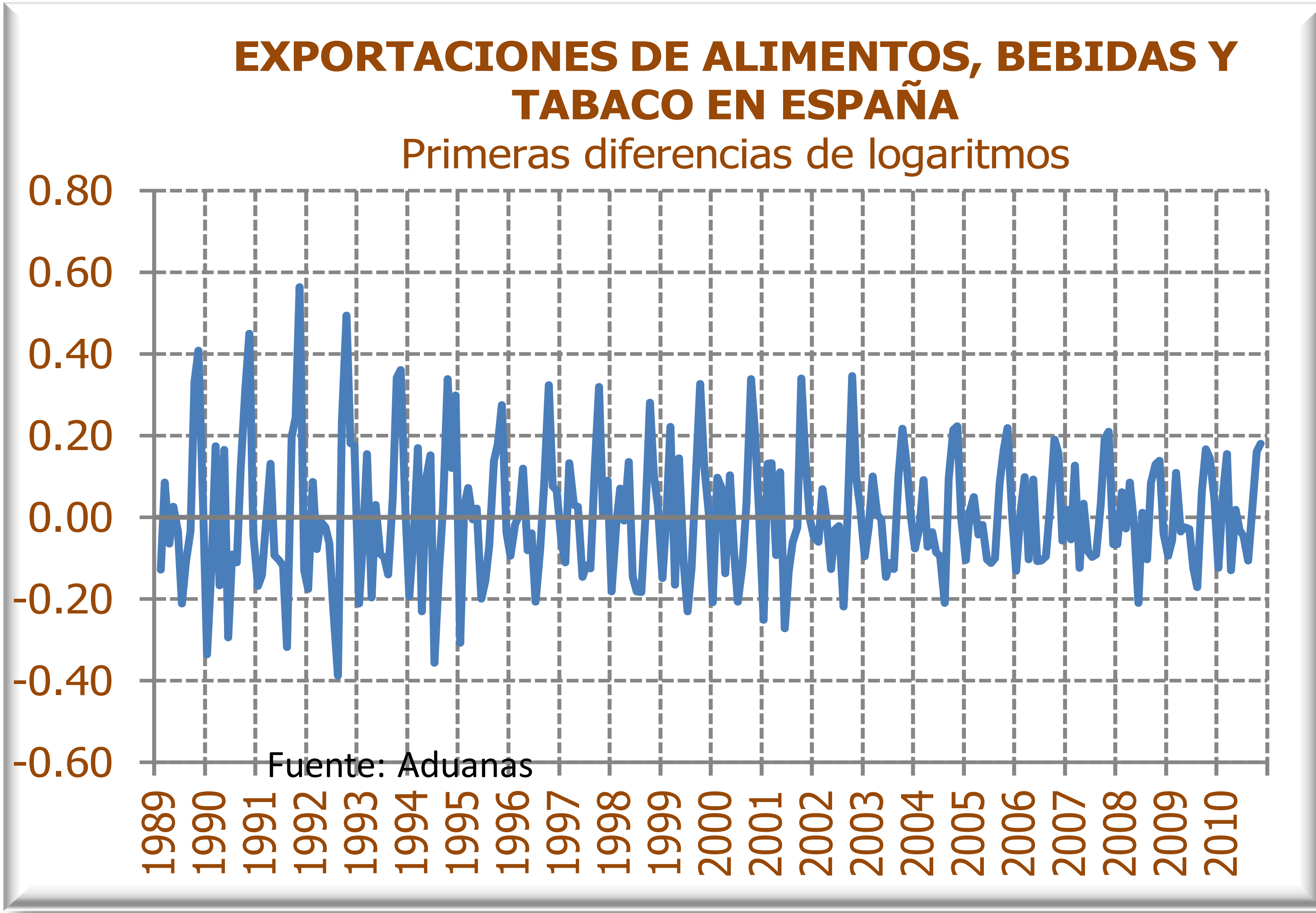
Serie original I(2,0)EE



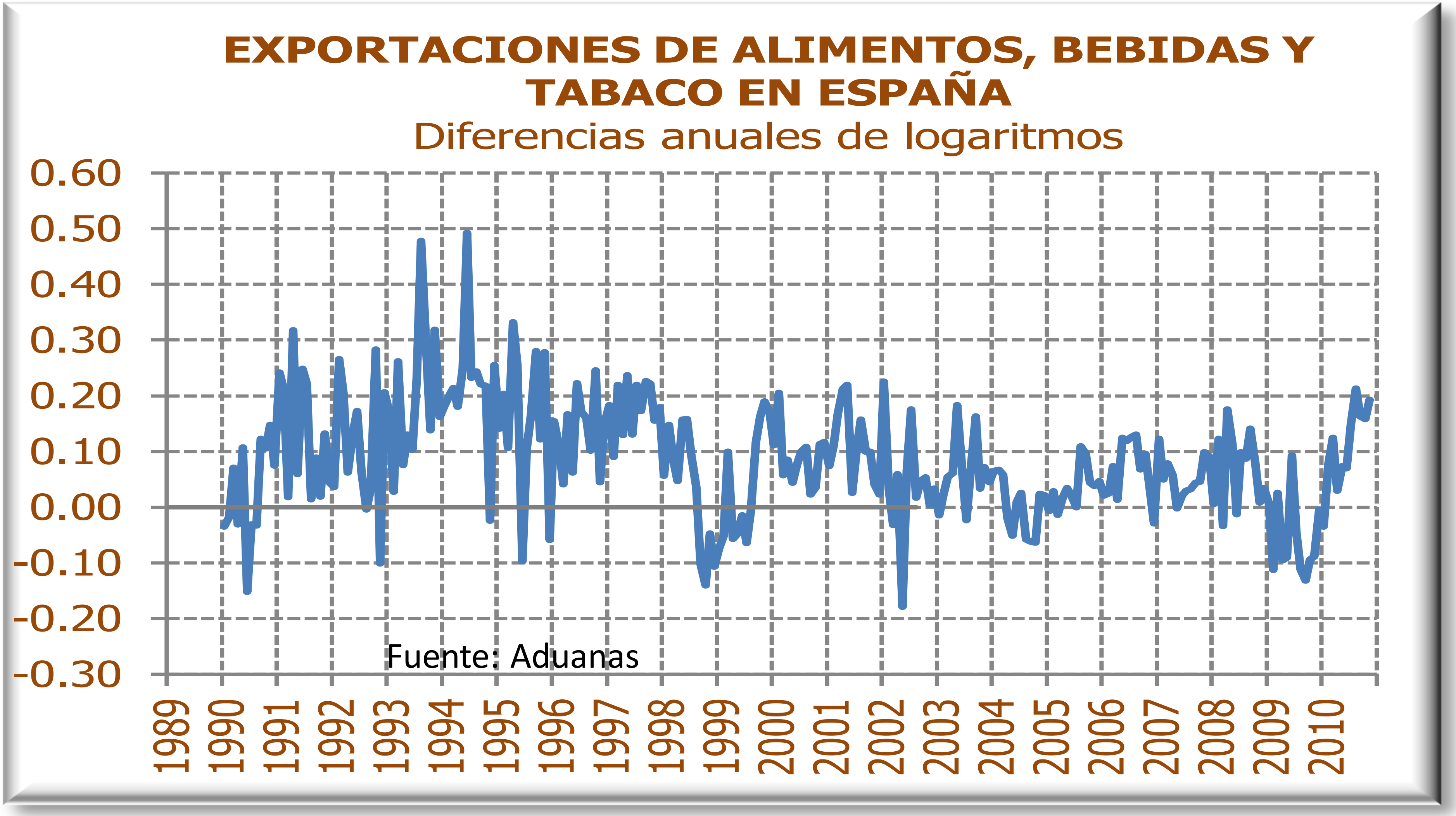
Transformación logarítmica I(2,0)EE



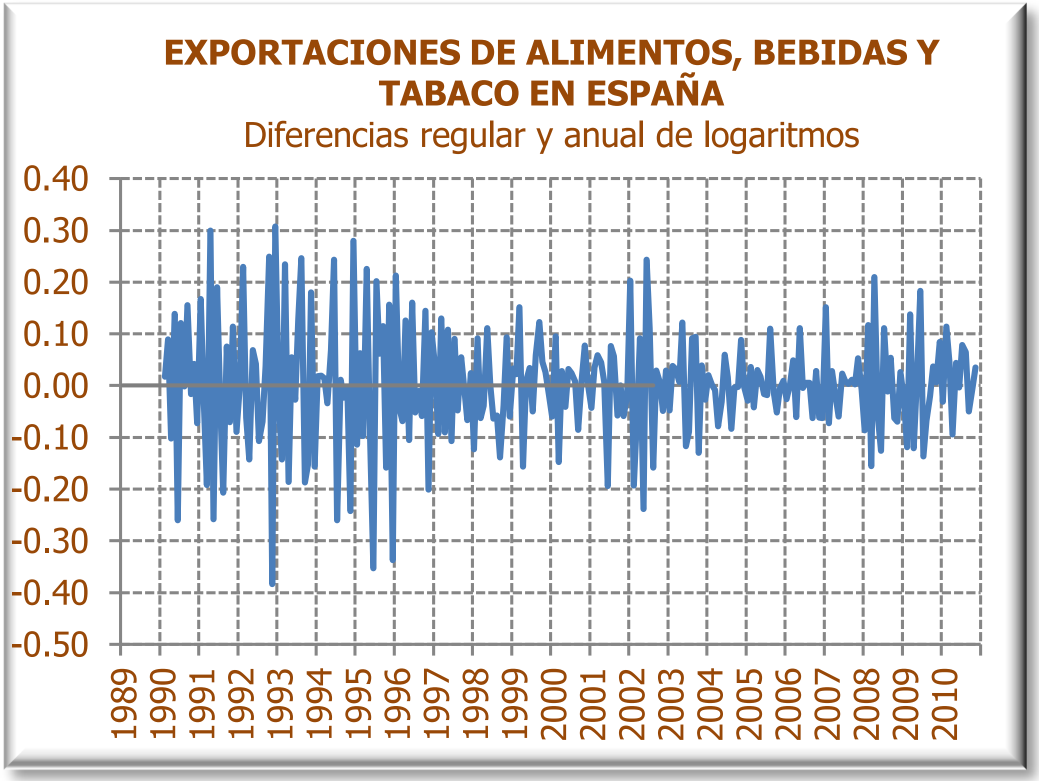
Primeras diferencias de logs, I(1,0)EE



Diferencias anuales de logaritmos, I(1,0)sin estacionalidad



Diferencias regulares y estacionales de los logs, I(0)



Fuente: Aduanas

REMOVING TREND AND SEASONALITY

A Series with local oscillations in levels [I(1,0)]

$X_t = X_{t-1} + W_t$ (33)

$\Delta X_t = W_t$ (34)

B Series with local oscillations in levels and stochastic seasonality [I(1,0)SS]

$X_t = X_{t-1} - [\Delta X_{t-1} + \dots + \Delta X_{t-s}] + W_t$ (35)

$X_t = X_{t-s} + W_t$ (36)

$\Delta_s X_t = W_t$ (37)

C Series with systematic growth in which the growth has a constant mean [I(1,1)]

$X_t = X_{t-1} + b + W_t$ (38)

$\Delta X_t = b + W_t$ (39)

D As (C) with stochastic seasonality [I(1,1)SS]

$X_t = X_{t-1} + s \cdot b - [\Delta X_{t-1} + \dots + \Delta X_{t-s}] + W_t,$ (40)

$X_t = X_{t-s} + s \cdot b + W_t$ (41)

$\Delta_s X_t = s \cdot b + W_t$ (42)

E Series with stochastic growth and stochastic seasonality [I(2,0)SS]

$X_t = X_{t-1} + \Delta X_{t-1} - \{LU_{s-1}(L)\,[\Delta X_{t-1} - \Delta X_{t-1}]\} + W_t$ (43)

$\Delta\Delta_s X_t = W_t$ (44)

CONCLUSION

- Applying regular and seasonal differences we can remove trend and seasonality.
- Later in the course we will see statistical tests to decide the type of differences that we need to apply to a given time series to eliminate possible trend and seasonality.
- **The properties of the regular and seasonal rates of growth of X_t depend on the model for X_t .**

En el modelo 1 la transformación estacionaria es

$$\Delta^2 X_t = W_t$$

En el modelo 1

X_t es I(2,0) y

ΔX_t es I(1,0).

EJEMPLO: MODELO 2

$$\left(1-\Phi_1 L^s-\Phi_2 L^{2s}\right)\Delta\Delta_s \log X_t=\left(1-\theta_1 L\right)\left(1-\theta_s L^s\right)a_t$$

Transformación Estacionaria:

$$\Delta\Delta_s \log x_t = w_t \qquad I(2,0)$$

Crecimiento sistemático y estacionalidad estocástica

$$\log x_t = \log x_{t-1} + \left[\log x_{t-s} - \log x_{t-s-1}\right] +$$ **Senda de evolución**

$$+\Phi_1 w_{t-s} + \Phi_2 w_{t-2s} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_s a_{t-s} + \theta_s \theta_{s+1} a_{t-s-1} +$$ **Oscilaciones alrededor de la senda de evolución**

$$+a_t$$ **Innovaciones**

En el modelo 2 la transformación estacionaria es:

$$\Delta\Delta_s X_t = W_t$$

En el modelo 2:

X_t: I(2,0) con estacionalidad estocástica

ΔX_t: I(1,0) con estacionalidad estocástica

$\Delta_s X_t$: I(1,0) sin estacionalidad.

EJEMPLO: MODELO 1

$$\left(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2\right)\Delta^2 \log X_t = a_t$$

Transformación estacionaria:

$$\Delta^2 \log x_t = w_t \qquad I(2,0)$$

Crecimiento sistemático sin estacionalidad.

$$\log x_t = \log x_{t-1} + \left[\log x_{t-1} - \log x_{t-2}\right] +$$ **Senda de evolución con crecimiento sistemático**

$$\phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} +$$ **Oscilaciones alrededor de la senda de evolución**

$$a_t$$ **Innovaciones**

EJEMPLO: MODELO 3

$$\Delta x_t = \sum_{j=1}^{s} b_j S_j t + (1-\theta L) a_t$$

Transformación estacionaria:

$$w_t = x_t - x_{t-1} - \sum_{j=1}^{s} b_j S_j t$$

Calcule $b = 1/s \sum b_j$

Defina $b_j^* = b_j - b$ y escriba $$\Delta x_t = b + \sum_{j=1}^{s} b_j^* S_j t + (1-\theta L) a_t$$

Si b es significativamente distinta de cero en el modelo 3, se tiene un crecimiento sistemático con una crecimiento medio determinista (b) y factores estacionales deterministas (bj*). En otro caso el modelo 3 sólo muestra oscilaciones locales de nivel con estacionalidad determinista.

$$x_t = x_{t-1} + b + \sum_{j=1}^{s} b_j^* S_j t +$$ **Senda de evolución**

$$-\theta a_{t-1} +$$ **Oscilaciones alrededor de la senda de evolución**

$$a_t$$ **Innovaciones**

En el modelo 3 la transformación estacionaria son los residuos W_t de la regresión:

$$\Delta X_t = b + \sum_{j=1}^{s} b_j^* S_{jt} + W_t$$

En la que se cumple la restricción:

$$\sum_{j=1}^{s} b_j^* = 0$$

En el modelo 3:

X_t: I(1,1) con estacionalidad determinada

ΔX_t: tampoco es estacionaria, pues aunque no tiene tendencia tiene estacionalidad determinista.

La transformación estacionaria de una serie $I(d,m^s)$ se obtiene:

(a) Tomando de diferencias

(b) Realizando una regresión de $\Delta^d X_t$ con las variables artificiales correspondientes a los componentes deterministas y

(c) Tomando como transformación estacionaria los residuos de dicha represión.

2.4

- CONTRASTES DE RAICE UNITARIAS EN LA TENDENCIA.
- LOS MODELOS ARIMA. SU APROXIMACIÓN MEDIANTE MODELOS ARI(p,d) CON RETARDOS CON PARQUEDAD PARAMETRICA. EN SU FORMULACION.

- **CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS.**

Referencias.

- Beveridge y Nelson (1981).
- **Enders, W., 2004, Applied Econometric Time Series, Wiley.**

Persistencia y raíces unitarias.

PROPIEDADES DEL POLINOMIO DE MEDIAS MÓVILES DE UN PROCESO ARMA O ARIMA

- Si el **proceso es estacionario** los coeficientes del polinomio tienden a cero. No hay persistencia.
- Si el **proceso es I(1)** los coeficientes son la integración de los coeficientes del correspondiente proceso en primeras diferencias, I(0), por tanto tienden a una constante.
- En ese caso la variable original incorpora las innovaciones con persistencia.
- Si el **proceso es I(2)** los coeficientes son la integración de los coeficientes del correspondiente proceso I(1), por lo que crecen linealmente.
- En este caso, la variable original incorpora las innovaciones pasadas con una ponderación creciente con la distancia de la innovación.

- **La representación de medias móviles del proceso I (2,0) es:**

$$X_t = (1 + \overline{\psi}_1 L + \overline{\psi}_2 L^2 + \ldots)\, a_t \quad ,$$

donde

$$\overline{\psi}_j \rightarrow \overline{\psi}_{j\text{-}1} + c.$$

Así, la ponderación de una innovación a_t en una variable posterior X_{t+j} va aumentando linealmente, es decir, en los procesos I (2) hay **ACUMULACION ALEATORIA**.

EL CONTRASTE DE RAÍCES UNITARIAS Y PERSISTENCIA EN LOS MODELOS I(1).

- La convergencia de los coeficientes a $\tilde{\psi}_j$ una constante se produce por la presencia de una raíz unitaria autorregresiva en el proceso I(1).
- En la literatura se ha dado gran cobertura a los contrastes de raíces unitarias que ha resultado muy extensa.

EJERCICIO

- Calcular la formulación de medias móviles infinitas de un proceso integrado de orden uno con una estructura estacionaria de medias móviles de orden 2.
- Realice los mismos cálculos pero para el caso de un proceso integrado de orden 2 con la misma estructura estacionaria anterior.

LOS SHOCKS ALEATORIOS QUE SUFREN LOS SISTEMAS ECONÓMICOS

- 1. ¿Son persistentes?
- 2. ¿De dónde proceden?

Teorías económicas de oscilaciones de la producción, generadas por perturbaciones de la demanda, sobre sendas de crecimiento estables.

- Teoría Keynesiana tradicional, teoría monetaria,…
- El crecimiento estable se identifica con una tendencia determinista.
- Enfoque muy utilizado hasta Nelson y Plosser (1982).

Modelos económicos de equilibrio estocástico dinámico.

- Nelson y Plosser(1982) encuentran persistencia en las tendencias de las variables económicas.
- Se tendieron a asociar con perturbaciones en la oferta.

Endogeneidad o exogeneidad en el crecimiento económico.

- A) El crecimiento económico depende de un progreso técnico exógeno.

Posiblemente es **casi-determinísta** con cambios esporádicos de pendiente.

B) Crecimiento endógeno

- Cambios permanentes en las variables de política económica generan cambios en la acumulación de capital físico y humano que determinan el crecimiento económico.

  Posiblemente estos cambios son más frecuentes que los debidos al progreso técnico.

  Con este enfoque las **tendencias tenderían a verse como estocásticas: I(1,1) o I(1,1^s).**

EL MODELO I(1,1) Y LAS TEORÍAS ECONÓMICAS

- **No tiene fundamento la pretensión de relacionar las teorías de crecimiento exógeno con el modelo I(0,2) y las de crecimiento endógeno con I(1,1).**
- El progreso tecnológico en los modelos de crecimiento exógeno puede formularse como un sendero aleatorio y
- los procesos de acumulación de capital físico y humano en los modelos de crecimiento endógeno pueden formularse con esquemas lineales.

Innovaciones en los modelos univariantes y perturbaciones en los sistemas económicos.

- Hansen y Sargent (1991) : el nexo entre las innovaciones univariantes y el origen y naturaleza de las “verdaderas perturbaciones” que afectan a la economía no está fundamentado.

  Conclusiones sobre estas últimas a partir de las primeras pueden ser incorrectas (Cochrane 1991)

Análisis univariante y teoría económica

- Difícilmente el análisis univariante servirá para discriminar una teoría económica sobre otra (Orcutt 1988).

  (Actualmente se utilizan modelos VAR estructurales para tal fin, aunque con frecuencia **las conclusiones no pueden tomarse como determinantes**).
- **Pero el análisis univariante puede poner de relieve propiedades en los datos que una teoría económica válida tendrá que ser capaz de explicar.**
- Por ejemplo,

  - la presencia de raíces unitarias o casi unitarias

Análisis univariante y teoría económica

- Al mismo tiempo, conclusiones teóricas firmes orientarán el análisis econométrico hacia formulaciones que, estando de acuerdo con los datos, no contradigan tales conclusiones.
- Por ejemplo, las relaciones de equilibrio a largo plazo entre variables, la presencia de regímenes cambiantes en el tiempo, etc.

Relevancia empírica de las teorías económicas.

- Juselius y Franchi (2005) señalan la dificultad de obtener tal relevancia ya que los datos son incompletos y muy imperfectos.

  Para ello es necesario casar cuidadosamente las hipótesis del modelo teórico con las propiedades estadísticas de los datos.

  Los modelos VAR cointegrados son un buen intrumento para ello.

Prototipo de modelo univariante para series económicas con tendencia.

El modelo $I(1,1^s)$:

- Tiene tendencia estocástica suave y con cambios esporádicos bruscos.
- Capta la incorporación de una raíz unitaria, que es una propiedad que se encuentra en muchas series económicas.
- Es compatible con la teoría de que el crecimiento revierta a la media y que a largo plazo la incertidumbre sobre el mismo esté acotada.
- Para la predicción es incorrecto ante nuevas segmentaciones en el horizonte de la predicción.

La descomposición de Beveridge y Nelson (1981).

Planteamiento estadístico inicial del problema de la persistencia: la descomposición de Beveridge y Nelson (1981).

Distintas estimaciones del estadístico ψ (1). Estadísticos alternativos.

Propiedades de la estimación de los estadísticos escalares sobre persistencia. La persistencia a través de secuencias paramétricas.

Modelo estacionario mediante diferenciación, tiene la representación

$$(1-L)X_t = \beta + \psi(L)a_t . \tag{6.4.1}$$

Dado que ψ(1) es distinto de cero, el polinomio de medias móviles en (6.4.1) se puede formular, véase apéndice matemático, de la forma

$$\psi(L) = \psi(1) + (1-L)\psi^*(L) \tag{6.4.2a}$$

con lo que

$$(1-L)X_t = \beta + \psi(1)a_t + (1-L)\psi^*(L)a_t . \tag{6.4.2b}$$

A partir de esta formulación Beveridge y Nelson (1981) proponen descomponer el proceso {Xt} en dos componentes, uno no estacionario, y por tanto con implicaciones a largo plazo, y otro estacionario, sin implicaciones de largo plazo. La descomposición de Beveridge y Nelson (1981) es

$$X_t = z_t + c_t \tag{6.4.3a}$$

$$z_t = \beta + z_{t-1} + \psi(1)a_t \tag{6.4.3b}$$

$$c_t = \psi^*(L)a_t , \tag{6.4.3c}$$

donde z_t es el componente no estacionario.

RESUMEN VI.9

ESTIMACIONES SOBRE LA PERSISTENCIA EN EL PNB DE ESTADOS UNIDOS.

- Campbell y Mankiw (1987): utilizan modelos univariantes de forma reducida y estiman la persistencia en 1.52

- Watson (1986) y Clark (1987): utilizan modelos univariantes estructurales y estiman la persistencia en 0.6.

  * Lippi y Reichlin (1992): demuestran que los modos estructurales imponen la restricción $\psi(1) < 1$.

- Cochrane (1988), Diebold y Rudebusch (1989), Miller y Newbold (1993), etc. obtienen que **la desviación estándar de la persistencia es muy elevada.**

CONCLUSIÓN: Se reafirma el resultado de Cochrane (1988):

el parámetro de persistencia $\psi(1)$ no es una faceta del proceso estocástico generador de una serie temporal que se pueda medir con precisión, en el sentido de que se puede exigir que cualquier modelo razonable para dicha serie la reproduzca.

LA SECUENCIA TEMPORAL DE DEPENDENCIA Y EL PARÁMETRO DE PERSISTENCIA.

- El parámetro de persistencia $\psi(1)$ importa en tanto en cuanto la secuencia, $1,\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2,\ldots,$ de parámetros en la formulación de medias móviles del proceso I(1,1) sobre la variable original no tiende a cero sino a una constante $c=\psi(1)$, donde $\psi(L)=1+\psi_1 L+\ldots$ es la secuencia de medias móviles correspondiente a la variable diferenciada.
- Cochrane (1988), Granger (1993), etc. en series temporales finitas es **imposible distinguir si** la secuencia $1,\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2,\ldots$ tiende muy lentamente a cero o converge a un valor distinto de cero.

- **CONCLUSIÓN**: Cochrane (1991) la cuestión de interés práctico no es si $\tilde{\psi}_j \longrightarrow \psi(1,)$ sino el estudio de un tramo relativamente largo de la secuencia: $1, \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots$

- Diebold y Redebusch (1989): utilizando modelos de diferenciación fraccional obtienen para el PIB de Estados Unidos que los valores de $\tilde{\psi}_j$ n superiores a la unidad en los cuatro primeros años, a más medio plazo toman valores sobre 0´7 y continúan disminuyendo en plazos más largos.

Contrastes de raíces unitarias.

Referencia básica: Enders (2004), Applied Time Series Econometrics, Wiley.

secciones 4.1 a 4.7

EL CONTRASTE DE RAÍCES UNITARIAS COMO CONTRASTE DE PERSISTENCIA EN LOS MODELOS I(1,1).

- La convergencia de los coeficientes a $\tilde{\psi}_j$ una constante se produce por la presencia de una raíz unitaria autorregresiva en el proceso I(1,1).
- En la literatura se ha dado gran cobertura a los contrastes de raíces unitarias que ha resultado muy extensa.

(1) la distribución asintótica de los estimadores correspondientes

- no es estándar y
- depende de parámetros impertinentes que hacen referencia al componente determinista y a los retardos endógenos presentes en el modelo,
- con lo que han ido apareciendo diversas tabulaciones de las distribuciones asintóticas bajo hipótesis específicas;

(2) en muestras finitas la aproximación asintótica es mala

- se producen distorsiones importantes en el tamaño y potencia de los contrastes y
- todo ello ha sido estudiado a través de múltiples experimentos de Monte Carlo.

CONTRATES DE RAICES UNITARIAS.El ESTADÍSTICO DE DICKEY Y FULLER

- Exposición tomada del libro de Charemza y Deadman (1993) 5.3.
- $X_t \sim I(1)$
- $X_t = X_{t-1} + \eta_t.$
- Procedimiento habitual
- $X_t = \rho X_{t-1} + \eta_t.$ (1)
- estimar por MCO, suponiendo que η_t es un ruido blanco
- aplicar estadístico t.
- Problemas:
- MCO es sesgado en muestras pequeñas.
- hay que determinar la distribución del estadístico t cuando X es I(1).

- Procedimiento alternativo.
  - Definir $\delta = \rho - 1$.
  - Ahora de (1) se tiene
  - $\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \eta_t$ (2)
- ESTADÍSTICO DE DICKEY-FULLER:
  - η_t: es ruido blanco.
  - H0: $X \sim I(1)$
  - contrastar si $\delta = 0$ en (2)
  - H1: $X \sim I(0)$, $\delta<0$.

- Problema
- El estadístico t en (2) no sigue la distribución t-Student si $X \sim I(1)$
- Si H0 es cierta en (2)
- regresando I(0) | estadístico t no tiene
- regresor I(1) | distribución asintótica
- normal.

- Solución
- Al desconocer la distribución se simula.

Aplicación:

(1) Contrastar $\delta = 0$ en (2)

Si se rechaza X es I(0)

Si no se rechaza

(1) Contrastar $\delta = 0$ en (3)

$$\Delta\Delta X_t = \delta\Delta \mathrm{X}_{\mathrm{t-1}} + \eta_t \qquad (3)$$

Si se rechaza es I(1)

Si no se rechaza contrastar con una diferencia más y así hasta que se rechace.

La presencia de parámetros impertinentes referidos a la dinámica estacionaria y a componentes deterministas.

EL MODELO PUEDE TENER COMPONENTES DETERMINÍSTICOS.

$$\Delta x_t = \mu + \delta X_{t-1} + \eta_t$$

$$\Delta x_t = \mu + \alpha \quad t + \delta \quad X_{t-1} + \eta_t$$

Tablas específicas

- AMPLIACIONES.
- EL MODELO PUEDE TENER COMPONENTES DETERMINÍSTICOS.
- Tablas específicas
- PROBLEMA: Si la parte determinística no está bien especificada el contraste es erróneo. Los contrastes de raíces unitarias sólo valen para casos en que se conoce la parte determinística. En la práctica hay que realizarlos con distintas especificaciones deterministas y los resultados obtenidos pueden no ser concluyentes.

LA DISTRIBUCION DEL ESTADISTICO

- Depende
- 1. de los regresores deterministas y
- 2. del tamaño de la muestra.

ESTADÍSTICO DE DICKEY Y FULLER AUMENTADO

En general, además de raíces unitarias habrá dependencia estacionaria con el pasado, que se puede aproximar mediante un esquema AR(p).

En tal caso el modelo sobre el que realizar el contraste es:

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j \Delta X_{t-j} + a_t \quad (5)$$

donde k = p -1.

Todo polinomio α_p (L) se puede representar en una parte permanente $\alpha_p(1)$ y otra transitoria (1-L) α^*_{p-1} (L)

$$\alpha^*_K = \sum_{j=k}^{p} \alpha_j.$$

Así

$$\alpha_p (L) = \alpha (1) + \alpha^*_{P-1} (l) (1-L)$$

(B)η_t: no es, en general, ruido blanco

$\alpha_p (L) Z_t = a_t$ (*)

$\alpha_p (L) = 1 - L \ \bar{\alpha}_{p-1} (L)$

$\alpha p (L) = 1 - L \ \bar{\alpha} (1) - L \ \bar{\alpha}^*_{p-2} (L) (1-L)$

$\alpha p (L) = (1 - L) + L - L \ \bar{\alpha} (1) - L \ \bar{\alpha}^*_{p-2} (L) (1-L)$

$\alpha p (L) = (1 - L) + \alpha_p (1) L - L \ \bar{\alpha}^*_{p-2} (L) (1-L)$

(4)

Así: CONTRASTE DE DICKEY FULLER AUMENTADO:

$\Delta xT = - \delta xT\text{-}1 + \sum_{J=1}^{K} \delta_j \Delta X_t - j + a_t$ (5), k= p-2

LA DISTRIBUCION DEL ESTADISTICO

- NO DEPENDE de los retardos de la variable.
- Si el orden autorregresivo empleado (r) es menor que el verdadero (p) los residuos no están bien estimados y por tanto el estadístico.
- Si r>p el contraste es válido, pero se reduce su potencia.

DICKEY Y FULLER CON AIC

La ecuación (5) anterior requiere determinar previamente el valor de p.

Véase Enders sección 4.7

Dos posibilidades.

1.- Empezando la regresión con un retardo alto e ir contrastando de arriba abajo si son significativos.

2.- se estiman modelos con distintos valores de p y se escoge uno mediante un criterio de ajuste que penalice por el número de parámetros.

CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS EN SERIES QUE TIENEN TRUNCAMIENTOS.

- LOS CONSTRASTES Y VALORES CRITICOS DISPONIBLES.
- Los contrates de raíces unitarias se realizan sobre estadísticos t o F de unos determinados parámetros en ciertos modelos de regresión.
- El problema radica en que las funciones de densidad de dichos estadísticos no siguen las distribuciones estándar t o de Fisher y por tanto no podemos sacar de ellas valores críticos para realizar los contrastes.
- Los autores que propusieron los contrastes de raíces unitarias eran conscientes del problema y mediante procedimientos de simulación tabularon las funciones de densidad adecuadas y de ellas se sacan los valores críticos para realizar los contrastes.

Las funciones de densidad de los estadísticos mencionados cambian según sean los componentes deterministas que entren en el modelo de regresión

constante,

tendencia y

variables artificiales para tener en cuenta los truncamientos.

Los autores de los contrastes de raíces unitarias calcularon funciones de densidad para los casos en los que no hayan elementos deterministas en la regresión, que haya solamente una constante o que haya constante y tendencia.

Obviamente para los casos de variables artificiales para truncamientos no se calcularon funciones de densidad pues estas dependen de los truncamientos concretos de que se trate.

¿CÓMO PROCEDER CUANDO HAY TRUNCAMIENTOS?

- La solución adecuada es que el usuario se genera por simulación las funciones de densidad correspondientes para su caso concreto. Véase Enders (2004).

EVIDENCIA RESULTANTE SOBRE LOS CONTRASTES DE RAÍCES UNITARIAS AUTORREGRESIVAS.

PROBLEMAS EN LA REALIZACIÓN DE LOS CONTRASTES:

Los resultados de estos contrastes pueden ser inválidos si no se tratan adecuadamente los posibles componentes deterministas en los datos (Campbell y Perron 1991).

Así, la creencia de que estos contrastes son útiles descansa necesariamente en la presunción de que el analista es capaz de especificar previamente los componentes deterministas (Cochrane 1991).

LA RAIZ UNITARIA COMO PUNTO DE CAMBIO DEL UNIVERSO AL QUE PERTENECEN LOS DATOS

$|\rho|<1$: **mundo estacionario: las perturbaciones aleatorias se olvidan**

$\rho=1$: **persístencia aleatoria.**

Ello es una característica asintótica.

Ilustración de Cochrane

En la antigua Babilonia los tipos de interés eran sobre el 6%, en EEUU en 1991 también.

$P_r(|r_{1991}|<100\%|r_{4000ac}=6\%)$

es:

- **infinitesimal si r es I(1)**
- **casi uno si es I(o) con r=0'99**

CONCLUSIÓN: "El comportamiento asintótico de un proceso I(1) nunca se puede aproximar mediante un proceso I(0).

CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS

Stock(1994): " en nuestras finitas existe un rango de modelos I(o) e I(i) entre los que los contrastes de raices unitarias son incapaces de discriminar".

Stock (1991): intervalos de confianza a la raiz autorregresiva más alta. En muchos casos excesivamente amplios: PIB (0'64- 1'03).

Así, los contrastes de raices unitarias no recogen la variabilidad muestral asociada en los mismos: no se rechaza el valor uno, pero no señalan el amplio rango de valores en modelos I (o) compatibles con los datos.

Es el problema de contrastar frente a una alternativa genérica. Esto también ocurre en contrastes sobre modelos estacionarios (Gonzalo y Lee 1996).

Pero aquí el valor uno es un punto de cambio de universo.

- Contrastes frente alternativas genéricas y variabilidad muestral asociada a los contrastes de raíces unitarias. Raíces unitarias o raíces estacionarias próximas a la unidad.

INTERVALOS DE CONFIANZA EN LA MAYOR RAÍZ AUTORREGRESIVA DE UNA SERIE TEMPORAL:

Con frecuencia los datos respaldan que la raíz más alta puede ser unitaria, pero es también muy posible que tenga valores bastante distantes de uno (Stock 1991).

Lo anterior no es específico de los contrastes de raíces unitarias, sino algo relativamente común en los contrastes frente a una hipótesis alternativa genérica (Gonzalo y Lee 1996).

El problema radica que en muestras infinitas una raíz exactamente de valor uno representa un universo de dimensión temporal infinita radicalmente diferente al universo caracterizado por una raíz inferior a uno.

EVIDENCIA DE LA HIPOTESIS NULA DE RAÍZ UNITARIA

Con gran frecuencia no se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria.

En Schwert (1987) se presenta evidencia internacional al respecto.

Esta es también la interpretación que realizan muchos autores cuando dan una visión de síntesis: Diebold y Rudebush (1989), Diebold y Nerlove (1990), Granger (1993), etc.

<u>**SUGERENCIA PRÁCTICA**</u>

(Hamilton 1994): cuando se estima una raíz autorregresiva alta, ρ, $[(0{,}9\text{-}0{,}95) < \rho < 1]$ conviene re-estimar el modelo con la restricción unitaria. Si ambos resultados son similares utilizar la restricción, si no lo son ambas especificaciones pueden considerarse incorrectas.

IMPLICACIONES DEL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA OBSERVACIONAL ENTRE PROCESOS ESTACIONARIOS Y PROCESOS INTEGRADOS.

A través de la **proposición de Blough** (1992) se puede llegar al principio de equivalencia observacional que implica que: para cualquier tamaño muestral finito T y dada la especificación de un modelo de raíz unitaria, existe una especificación de modelo estacionario para la que la probabilidad de que con ella se observe una muestra de tamaño T con la que el valor de la función de verosimilitud derivada del modelo con raíz unitaria difiera en más de una cantidad η del valor de la función de verosimilitud derivada del modelo estacionario es ε, siendo η y ε valores tan pequeños como se quiera.

CONCLUSIÓN: en series temporales finitas existe continuidad entre procesos de raíces unitarias y procesos estacionarios.

IMPLICACIONES:

(1) lo importante no son parámetros escalares que recojan las diferencias en el infinito entre procesos estacionarios e integrados, sino

(2) estadísticos secuenciales que reflejen la dependencia entre las variables del proceso.

(3) Así, la raíz unitaria es un instrumento que resulta útil a la hora de aproximar dichas secuencias (Box-Jenkins).

RESUMEN VI.14

CRECIMIENTO CUASI-LINEAL EN LAS MAGNITUDES ECONÓMICAS.

MODELO PROTOTIPO:

- con frecuencia es aceptado por los datos y
- tiene interés teórico. En concreto, en los universos $I(1,1^s)$ existe mayor campo de acción para las medidas de política económica, ya que pueden orientarse a actuar sobre una estructura de crecimiento que ni es inmutable ni cambia continuamente.

UTILIDAD DEL MODELO I(2,0)

- Las segmentaciones en el modelo $I(1,1^s)$ pueden venir generadas por causas muy diferentes con esquemas aleatorios muy diversos en cuanto a la frecuencia y magnitud de las segmentaciones, con lo que formulación de dichos esquemas e incluso la detección de las segmentaciones pueden ser tareas muy complejas. En tales casos la aproximación mediante el modelo I(2,0) puede resultar útil y aconsejable.
- Cuanto menores sean los niveles de agregación funcional, temporal y sobre unidades económicas de una determinada magnitud económica más útil puede resultar el empleo del modelo I(2,0).

IMPLICACIONES

(A) El tipo de modelo univariante estimado para una misma magnitud económica a diferentes niveles de agregación puede tener una caracterización I(d,m) distinta aunque mantengan el mismo orden polinomial tendencial. Tal hecho no debe contemplarse necesariamente como contradictorio.

(b) En el análisis econométrico sobre variables $I(1,1^s)$ la teoría sobre cointegración debe ampliarse a la teoría de co-truncamiento.

(c) Los esquemas aleatorios sobre la segmentación en los modelos $I(1,1^s)$ en general pueden implicar que la esperanza matemática de la pendiente del componente de tendencia sea una constante. En tales casos se garantiza la reversión a la media en la variable en primeras diferencias. Pero tal propiedad teórica puede tener un interés práctico muy limitado ya que dicha esperanza matemática puede ser imposible de estimar en muestras finitas.

- RAICES UNIARIAS ESTACIONALES

CONTRASTE DE RAICES UNITARIAS ESTACIONALES

El operador Δ_s tiene s raices.

En el contrate de Dickey y Fuller para raíces estacionales, se contrasta que todas las s raíces son unitarias.

Se trata de contrastar si en

$$X_t = \alpha_s X_{t-s} + a_t \ ,$$

α_s es la unidad.

Para ello se formula:

$$\Delta_s X_t = \delta_s X_{t-s} + a_t,$$

donde $\delta = \alpha$-1 y se contrasta si α es 0.

Test of Osborne et al.

Prof. Antoni Espasa

.

El test de Osborn et al (1988) para diferencias regulares y estacionales.

- Para determinar el orden de integración de una determinada serie, , uso el test de Osborn et al (1988). La regresión del test tiene la forma:

$$\Delta\Delta_{12}x_t = \beta_1\Delta_{12}x_{t-1} + \beta_2\Delta x_{t-12} + \sum_{k=1}^{12}\delta_k D_{kt} + \sum_{i=1}^{p}\phi_i\Delta\Delta_{12}x_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

- donde D_{kt} es una variable estacional que toma valor uno en el mes *k* y cero en el resto de los meses y es un término de error.

TEST DE RAÍCES UNITARIAS OCSB

(Osborn, Chu, Smith, Birchenhall; 1988)

Ecuación del test para una serie mensual:

$$\Delta\Delta_{12} y_t = \sum_{k=1}^{12} \delta_k D_{kt} + \beta_1 \Delta_{12} y_{t-1} + \beta_2 \Delta y_{t-12} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \Delta\Delta_{12} y_{t-j} + \varepsilon_t$$

Se selecciona el orden p para el modelo de la ecuación anterior mediante el criterio *AIC*, escogiendo aquel que presente menor valor en este criterio.

TEST DE RAÍCES UNITARIAS OCSB

Se contrasta la hipótesis conjunta de la presencia de raíz regular y estacional mediante el contraste: $\beta 1=\beta 2=0$

Si este contraste rechaza la hipótesis nula, se procede a realizar los contrastes individuales sobre $\beta 1=0$ y sobre $\beta 2=0$ para determinar la presencia de sólo una raíz regular o sólo una raíz estacional.

Los valores críticos al 5% para $\beta 1=0$, $\beta 2=0$ y el test F de $\beta 1=\beta 2=0$ son respectivamente - 2.10, -5.67 y 18.34 y los valores críticos de los mismos tests al 1% son -2.78 -6.37 y 22.93.

Se recomienda calcular el AIC para un total de 14 modelos diferentes:

- 14 modelos desde $p=0$ hasta $p=14$, manteniendo siempre el retardo 12. Si al final no es significativo se eliminará.

La hipótesis nula de que la variable contiene una diferencia estacional y una regular

Implica que β_1 y β_2 son cero.

Se puede contrastar mediante un estadístico F tal y como sugieren Osborn et al (1988).

El estadístico no sigue la distribución estándar.

La hipótesis es que sólo haya una diferencia regular

- **Esta hipótesis está representada en la ecuación (1) por $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 < 0$.**

Osborn et al (1988) sugieren el uso de estadísticos *t*. Pero no tienen la distribución estándar.

Si en (1) β_1 es cero y β_2 no, ello implica que $\Delta\Delta_{12} X_t$ y ΔX_{t-12} tienen el mismo orden de integración y, por tanto, necesariamente el de ΔX_{t-12} , con lo que X_t es I(1).

La hipótesis de que el proceso requiera tan solo una diferencia anual

- **Está recogida en la ecuación (1) con $\beta_2 = 0$ y $\beta_1 < 0$.**

  Se contrasta mediante un estadístico t, cuya distribución no es la estándar.

Si en (1) β_2 es cero y β_1 no, ello implica que $\Delta\Delta_{12} X_t$ y $\Delta_{12}X_t$ tienen el mismo orden de integración y, por tanto, necesariamente el de $\Delta_{12}X_t$, con lo que X_t es I(1) con estacionalidad estocástica.

EJEMPLO SERIE IPI MENSUAL

(1996:01 – 2008:12)

Se selecciona el modelo con p=7 + j=12 como el que presenta el menor AIC.

Dependent Variable: DD12
Method: Least Squares
Date: 03/17/11 Time: 14:56
Sample: 1996M01 2008M12
Included observations: 156

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D1	0.030816	0.012835	2.400949	0.0177
D2	0.009769	0.011352	0.860532	0.3910
D3	0.033511	0.013167	2.545077	0.0121
D4	-0.028522	0.013528	-2.108399	0.0369
D5	0.039344	0.013184	2.984177	0.0034
D6	0.001772	0.011249	0.157501	0.8751
D7	0.005399	0.011207	0.481769	0.6308
D8	-0.234401	0.046147	-5.079398	0.0000
D9	0.223212	0.041954	5.320371	0.0000
D10	0.018280	0.011911	1.534694	0.1272
D11	-0.015585	0.011197	-1.391973	0.1662
D12	-0.077242	0.016806	-4.596153	0.0000
BETA1	-0.079033	0.114395	-0.690874	0.4908
BETA2	-0.558399	0.102626	-5.441107	0.0000
D(LIPI(-1),1,12)	-0.797163	0.138249	-5.766141	0.0000
D(LIPI(-2),1,12)	-0.617393	0.154816	-3.987923	0.0001
D(LIPI(-3),1,12)	-0.115120	0.162933	-0.706547	0.4811
D(LIPI(-4),1,12)	0.181498	0.160187	1.133037	0.2592
D(LIPI(-5),1,12)	0.399218	0.153169	2.606385	0.0102
D(LIPI(-6),1,12)	0.467998	0.128335	3.646679	0.0004
D(LIPI(-7),1,12)	0.244460	0.082855	2.950446	0.0037
D(LIPI(-12),1,12)	0.205741	0.072098	2.853637	0.0050

R-squared	0.722708	Mean dependent var	-0.000804
Adjusted R-squared	0.679252	S.D. dependent var	0.069608
S.E. of regression	0.039422	Akaike info criterion	-3.498950

EJEMPLO SERIE IPI MENSUAL

(1996:01 – 2008:12)

Los resultados del contraste de hipótesis sobre $\beta 1=\beta 2=0$ son los siguientes:

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	15.39562	(2, 134)	0.0000
Chi-square	30.79125	2	0.0000

El valor del estadístico F es inferior al valor crítico al 5% por lo que no se rechaza la hipótesis nula.

Se concluye que la serie requiere tanto una diferencia regular como una estacional.

- Para determinar el orden de integración de una determinada serie, , uso el test de Osborn et al (1988). La regresión del test tiene la forma:

$$\Delta\Delta_{12} x_t = \beta_1 \Delta_{12} x_{t-1} + \beta_2 \Delta x_{t-12} + \sum_{k=1}^{12} \delta_k D_{kt} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta\Delta_{12} x_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

- donde   es una variable estacional que toma valor uno en el mes *k* y cero en el resto de los meses y es un término de error.

- Bajo la hipótesis nula la variable contiene una diferencia estacional y una regular, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y esta hipótesis se puede contrastar mediante un estadístico F tal y como sugieren Osborn et al (1988). Una alternativa a esta hipótesis es que sólo haya una diferencia regular, esta hipótesis está representada en la ecuación (1) por $\beta_1 = 0$ y . Una segunda alternativa es que el proceso requiera tan solo una diferencia anual, que está capturado en la ecuación (1) por $\beta_2 < 0$ y $\beta_1 < 0$. Osborn et al (1988) sugieren el uso de estadísticos *t* para $\beta_2 = 0$ y para contrastar estas dos posibilidades. $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$

EJEMPLO PREPARADO POR JUAN DE DIOS TENA

- La siguiente tabla muestra el resultado de los tests para las 20 series desagregadas del IPC USA. De forma adicional, en la cuarta columna de esta tabla he incluido un test F Standard para contrastar la posibilidad de estacionalidad determinista en la ecuación 1.

Contraste de Osborn et al (1988) para 20 series desagregadas del IPC USA

$$\Delta\Delta_{12}x_t = \beta_1\Delta_{12}x_{t-1} + \beta_2\Delta x_{t-12} + \sum_{k=1}^{12}\delta_k D_{kt} + \sum_{i=1}^{p}\phi_i\Delta\Delta_{12}x_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

Table. OCSB Seasonal unit root tests results.

	β_1	β_2	$F_{1,2}$	F_s	lags
$S_{1,t}$	-1.35	-13.84 (**)	108.65 (**)	112.34 (**)	7
$S_{2,t}$	1.02	-12.36 (**)	93.08 (**)	108.41 (**)	8
$S_{3,t}$	1.51	-9.03 (**)	44.23 (**)	5.20 (**)	0
$S_{4,t}$	0.66	-13.26 (**)	95.92 (**)	6.76 (**)	2
$S_{5,t}$	-0.61	-10.29 (**)	57.89 (**)	7.86 (**)	2
$I_{1,t}$	1.76	-11.02 (**)	65.63 (**)	9.61 (**)	0
$I_{2,t}$	3.33	-11.51 (**)	71.61 (**)	1.63	0
$I_{3,t}$	0.81	-5.53	20.30 (*)	0.66	7
$I_{4,t}$	0.36	-8.66 (**)	43.81 (**)	3.87(**)	11
$A_{1,t}$	1.48	-10.87 (**)	68.10 (**)	6.17 (**)	9
$A_{2,t}$	0.97	-13.72 (**)	102.94(**)	3.12 (**)	2
$A_{3,t}$	0.69	-14.39 (**)	112.39 (**)	2.78 (**)	1
$A_{4,t}$	2.09	-12.72 (**)	89.10 (**)	4.91 (**)	3
$A_{5,t}$	0.19	-13.10 (**)	93.15 (**)	3.58 (**)	1
$A_{6,t}$	-1.45	-13.67 (**)	101.03 (**)	6.32 (**)	0
$A_{7,t}$	1.76	-13.42 (**)	100.60(**)	13.79 (**)	4
$E_{1,t}$	0.99	-13.45 (**)	105.16 (**)	3.84 (**)	10

Notes: (1) is the F statistic to test for the significance of seasonal dummies. * indicates the null hypothesis of zero coefficient(s)in Equation (1) is rejected at the 5% significance level; ** indicates the null hypothesis of zero coefficient(s)in Equation (1) is rejected at the 5% significance level. The critical values of Rodrigues and Osborn (1997) are used.

CONTRASTES INDIVIDUALES DE LOS DIFERENTES PARES DE RAICES UNITARIAS COMPLEJAS

Hylleberg et al.(1990)

PARSIMONIUOS LONG LAGS

- **Suppose w_t is ΔX_t.**

- The restrictions in the lags are obtained making use of the fact that:
- $\Delta_m = (1-L_m)= (1-L)(1+L+L_2+L_3+\ldots L_{m-1})$.
- So $\boldsymbol{\alpha\, \Delta_m X_{t-1} =\alpha(1+L+L_2+\ldots L_{m-1})(1-L)\, X_{t-1}}=\alpha[w_{t-1}+ w_{t-2} +\ldots+ w_{t-m}]$. Therefore with just one coefficient α we capture the lags 1 to m, restricted to have the same coefficient.

- Then **the general restricted AR structure** from which it could be of interest to select a more parsimonious AR model will be one with the following lags:

1,2,3,12 on **ΔX_t** [generating the regressors ΔX_{t-1}, ΔX_{t-2} , ΔX_{t-3} and ΔX_{t-12}.

All these lags have free coefficients

4-6 on **$\Delta_3 X_{t-4}$**[generating the regressors ΔX_{t-4}, ΔX_{t-5} and ΔX_{t-6}].

These three lags are restricted to have the same coefficient.

7-11 on **$\Delta_5 X_{t-7}$**[generating the regressors ΔX_{t-7} to ΔX_{t-11}]

These five lags are restricted to have the same coefficient.

In cases could also be interested to include

the lag 13 on **$\Delta_{12} X_{t-13}$.**

Try all possible combinations and select the model with less AIC .

At lest try with lags 1,2,3,12 on **ΔXt**.

antoni.espasa@uc3m.es

PLL when the stationary variable is $\Delta\Delta_{12}X_t$

- The same procedure as before applies, but **the restricted general model includes lags on** $\Delta\Delta_{12}X_t$(1,2,3, and 12),
- $\Delta_3\Delta_{12}X_{t-4}$(4-6),
- $\Delta_5\Delta_{12}X_{t-7}$(7-11).