

# **Modelos Econométricos de Series Temporales para la Predicción y el Análisis de la Coyuntura Económica**

**CINVE**

**Noviembre 2015**

**Prof. Antoni Espasa**

**TEMA 3**

**PREDICCIÓN CON MODELOS UNIVARIATES**

- **ESTRUCTURA DE  
UN MODELO DE  
SERIES  
TEMPORALES**

$X_t$   
variable  
de interés

=

Relación  
estructural con su  
propio pasado y el  
pasado de otras  
variables

+

$a_t$   
componente  
aleatorio  
impredecible

# El problema de predicción

- Con información hasta el momento **n** predecir el valor de la variable en **(n+h)**.
- El predictor óptimo en un universo Gaussiano es la **esparanza matemática condicional**,
- en nuestro caso condicional **al pasado**.

# PREDICCIÓN A HORIZONTE $h=1$ .

$$X_{n+1}$$

- Es inmediata. La esperanza matemática condicional a lo observado hasta  $n$  es conocida . No hay que calcularla.
- La predicción es la parte estructural del modelo.
- La varianza del error de predicción es la varianza residual o condicional del modelo.

# DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR DE UNA VARIABLE ECONÓMICA EN EL MOMENTO $t$

- $X_t =$  su predicción [con información hasta  $(t-1)$ ]

+

la innovación contemporánea  
(momento  $t$ ),  $a_t$ .

# PREDICCIÓN A HORIZONTES $h$ MAYOR QUE UNO.

- **Cuando  $h > 1$**

la parte estructural del modelo incluye información posterior a  $n$

por lo que la esperanza matemática de  $X_{t+h}$  condicional a  $n$

viene dada por la **esperanza matemática condicional de la parte estructural condicional a  $n$**  y

hay que calcularla.

**Hay que proceder recursivamente desde  $h=1$** , pues la esperanza condicional en  $(n+h)$  puede depender de la esperanza en  $(n+h-1)$ .

# ERROR DE PREDICCIÓN A HORIZONTE $h=1$ .

- **Para  $h=1$**  el error de predicción es el residuo contemporáneo. Esto da una interpretación al componente residual del modelo.
- Por tanto si el modelo es correcto la secuencia de errores son ruido blanco.
- El error es el mismo prediciendo niveles o tasas de crecimiento, aunque la interpretación es distinta.

# ERROR DE PREDICCIÓN A HORIZONTE $h > 1$ .

Tiene dos componentes:

- la innovación contemporánea y
- el error en la predicción de la parte estructura.

Ahora los errores ya no son ruido blanco.

Además, para un periodo  $n$  base dado los errores a horizontes  $h=1, 2, \dots, h^*$  están correlacionados. El error que cometo hoy ( $n$ ) prediciendo ( $n+1$ ) afecta al error que cometo prediciendo ( $n+h^*$ ,  $h^* > 1$ ).

$X_{t+h}$   
variable de  
interés en el  
momento  
 $t+h$

=

predicción de  $X_{t+h}$   
con información  
hasta el momento  
 $t-1$

+

Error de  
predicción a  
horizonte  $h+1$

• **11 DE  
NOVIEMBRE  
2015**

# PREDICCIÓN CON MODELOS ESTACIONARIOS DE MEDIAS MÓVILES



**MA (1)**

**Table 3.7 D Forecasting with MA(1) models**

	Model MA(1) with zero mean $w_t = \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$	Model MA (1) with non-zero mean $w_t = c + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$
Forecasts		
h = 1		
True value	$w_{n+1} = \varepsilon_{n+1} + \beta \varepsilon_n$ (3.51)	$w_{n+1} = c + \varepsilon_{n+1} + \beta \varepsilon_n$
forecast	$f_{n,1}^{(w)} = \beta \varepsilon_n$ (3.55)	$f_{n,1}^{(w)} = c + \beta \varepsilon_n$
Forecast error	$e_{n,1}^{(w)} = \varepsilon_{n+1}$ (3.56)	$e_{n,1}^{(w)} = \varepsilon_{n+1}$
Var of the forecast error	$\text{Var} [ e_{n,1}^{(w)} ] = \sigma^2$	$\text{Var} [ e_{n,1}^{(w)} ] = \sigma^2$
h > 1		
True value	$w_{n+h} = \varepsilon_{n+h} + \beta \varepsilon_{n+h-1}$	$w_{n+h} = c + \varepsilon_{n+h} + \beta \varepsilon_{n+h-1}$
Forecast	$f_{n,h}^{(w)} = 0$	$f_{n,h}^{(w)} = c$
Forecast error	$e_{n,1}^{(w)} = \varepsilon_{n+h} + \beta \varepsilon_{n+h-1}$	$e_{n,h}^{(w)} = \varepsilon_{n+h} + \beta \varepsilon_{n+h-1}$
Var. of the forecast error	$\text{Var} [ e_{n,1}^{(w)} ] = (1 + \beta^2) \sigma^2 = \gamma_0$	$\text{Var} [ e_{n,h}^{(w)} ] = (1 + \beta^2) \sigma^2 = \gamma_0$

# Predicción con modelos MA(q)

- Las siguientes características de la predicción con modelos MA(1) se generalizan para modelos MA(q).
- La esperanza matemática condicional a  $n$  (predicción) difiere de la media marginal de la variable hasta horizonte  $h=q$ .
- A horizontes mayores la predicción basada en estos modelos no tiene ventajas sobre un predictor basado en la media.

# Errores de predicción con modelos MA(q)

- La estructura del error de predicción y, por tanto, su varianza van  **aumentado con el horizonte**, hasta  $h=q+1$ ,
- momento a partir del cuál la varianza del error de predicción  **se estailiza** y no es más que la varianza marginal de la serie que se está prediciendo.
- **La incertidumbre respecto al futuro está acotada: va aumentando con el horizonte y alcanza su máximo para  $h=q+1$ .**
- En estos modelos a partir de  $t=n+q+1$  todo el contenido estocástico de la variable  $W_t$  es impredecible.

• **I(1,0) IMA(1,q)**

## MODELS FOR NONSTATIONARY DATA: EXAMPLES.

### 1) $x_t$ : I (1,0) plus stationary MA(1) deviations:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}, \quad (3.52)$$

which can also be formulated as

$$x_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (1+\beta) \varepsilon_{t-j}. \quad (3.53)$$

This model is called integrated moving average with integration order  $d = 1$  and moving average order one and denoted as IMA (1,1).

The stationary transformation of (3.52) is given by  $\Delta x_t$ , which follows an MA(1) model with zero mean.

A partir de (6.3.13) se tiene que su formulación en términos de medias móviles es:

$$X_t = (1-L)^{-1} \psi_\infty(L) a_t, \quad (6.3.14)$$

es decir

$$X_t = \overline{\psi}_\infty(L) a_t, \quad (6.3.15)$$

donde

$$\overline{\psi}_j = \sum_{h=0}^j \psi_h. \quad (6.3.16)$$

Ahora

$$\overline{\psi}_j \neq 0, j \rightarrow \infty,$$

y

$$\overline{\psi}_j \rightarrow \psi_\infty(1) = c, j \rightarrow \infty. \quad (6.3.18)$$

$$\mathbf{X}_{n+2} = \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+2}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(x)}_{n,2} &= \mathbf{f}^{(x)}_{n,1} + \mathbf{f}^{(w)}_{n,2} \\ &= \mathbf{x}_n + \beta \varepsilon_n + \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

In general

$$\mathbf{f}^{(x)}_{n,h} = \mathbf{f}^{(x)}_{n,(h-1)} + \mathbf{f}^{(w)}_{n,h}, \tag{3.62}$$

$$X_{n,h} = X_n + W_{n+1} + W_{n+2} + \dots + W_{n+h} \quad (3.63)$$

therefore

$$e_{n,h}^{(x)} = e_{n,1}^{(w)} + e_{n,2}^{(w)} + \dots + e_{n+h}^{(w)} \quad (3.64)$$

Operating on (3.64)

$$\begin{aligned} e_{n,h}^{(x)} &= \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \beta\varepsilon_{n+1} + \dots + \varepsilon_{n+h-1} + \beta\varepsilon_{n+h-2} + \varepsilon_{n+h} + \beta\varepsilon_{n+h-1} \\ &= \varepsilon_{n+h} + \sum_{j=1}^{h-1} (1 + \beta)\varepsilon_{n+j} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Then

$$\text{Var} \left[ e_{n,h}^{(x)} \right] = (h-1)(1+\beta)^2 \sigma^2 + \sigma^2 \quad (3.66)$$

# Predicción con modelos

## I(1,0) IMA(1,q)

- $X_{n,h} = X_n + W_{n+1} + W_{n+2} + \dots + W_{n+h}$
- La predicción es el último valor observado más las predicciones de los componentes estacionarios posteriores a  $n$ .
- A partir de  $h=q+1$  la predicción de  $W_{n+h}$  es cero.
- La predicción de  $X_{n+h}$  va incorporando nuevos términos hasta que en  $n+q$  toma un valor constante hacia el futuro.

# Errores en la predicción con modelos I(1,0) IMA(1,q)

- Con el aumento del horizonte la estructura del error de predicción incorpora términos no convergentes.
- Con lo que su varianza crece linealmente hacia el infinito.
- La incertidumbre no está acotada.
- Se acaba prediciendo un valor constante hacia el futuro, pero sobre el que cada vez hay más incertidumbre.

# I(1.1), IMA (1,1)

- $X_{n,h} = X_n + W_{n+1} + W_{n+2} + \dots + W_{n+h}$
- $f^{(x)}_{n,h} = x_n + hc + \beta \varepsilon_n,$
- $e^{(x)}_{n,h} = e^{(w)}_{n,1} + e^{(w)}_{n,2} + \dots + e^{(w)}_{n+h} \quad .$

# Predicción con modelos

## I(1,1) IMA(1,q)

- $X_{n,h} = X_n + hc + w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_{n+h}$
- La predicción es el último valor observado **más un crecimiento lineal** las predicciones de los componentes estacionarios posteriores a n.
- A partir de  $h=q+1$  la predicción de  $w_{n+h}$  es cero.
- La predicción de  $X_{n+h}$  **es una recta con pendiente fija , c**, que va cambiando la ordenada l incorporando nuevos términos hasta que en  $n+q$  **toma un valor constante hacia el futuro.**

# Errores en la predicción con modelos $I(1,1)$ $IMA(1,q)$

- La predicción difiere de la del modelo  $I(1,0)$  en un crecimiento determinista que por definición se predice sin error.
- Los errores en este caso tienen la misma estructura que en el anterior.
- Se acaba prediciendo con una línea recta hacia el futuro, pero sobre la que cada vez hay más incertidumbre.

## 2) $x_t$ : I (1,1) plus stationary MA(1) deviations.

$$x_t = x_{t-1} + c + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}. \quad (3.67)$$

It can also be formulated as

$$x_t = x_0 + \beta\varepsilon_0 + tc + \sum_{j=1}^{t-1} (1+\beta)\varepsilon_j + \varepsilon_t, \quad (3.67\text{bis})$$

where the term  $tc$  captures the systematic growth in  $x_t$ .

The stationary transformation is

$$\Delta x_t = c + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1},$$

which follows on MA(1) with nonzero mean,  $c$ .

In IMA (1,1) variable an innovation  $\varepsilon_t$  has an initial effect with (standardized) unit weight and from the next period has a permanent effect with weight  $(1 + \beta)$ , see (3.53) and (3.67 bis).

**Table 3.7E**

Forecasting with integrated MA (1) models

	Model I (1, 0) with an stationary MA (1) component $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$	Model I (1,1) with an stationary MA (1) component $x_t = x_{t-1} + c + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$
Forecasts		
<b>h = 1</b>		
<b>True value</b>	$x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n + \beta \varepsilon_{n-1}$	$x_{n+1} = x_n + c + \varepsilon_n + \beta \varepsilon_{n-1}$
<b>forecast</b>	$f_{n,1}^{(x)} = x_n + \beta \varepsilon_{n-1}$	$f_{n,1}^{(x)} = x_n + c + \beta \varepsilon_{n-1}$
<b>Forecast error</b>	$e_{n,1}^{(x)} = \varepsilon_{n+1}$	$e_{n,1}^{(x)} = \varepsilon_{n+1}$
<b>Var of the forecast error</b>	$\text{Var} [ e_{n,1}^{(x)} ] = \sigma^2$	$\text{Var} [ e_{n,1}^{(x)} ] = \sigma^2$
<b>h &gt; 1</b>		
<b>True value</b>	$x_{n+h} = x_{n+h-1} + \varepsilon_{n+h} + \beta \varepsilon_{n+h-1}$ $= x_n + w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_{n+h}$	$x_{n+h} = x_{n+h-1} + c + \varepsilon_{n+h} + \beta \varepsilon_{n+h-1}$ $= x_n + hc + w_{n+1} + w_{n+h}$
<b>Forecast</b>	$f_{n,h}^{(x)} = x_n + f_{n,1}^{(w)} + f_{n,2}^{(w)} + \dots + f_{n,h}^{(w)} = x_n + \beta \varepsilon_n$	$f_{n,h}^{(x)} = x_n + hc + f_{n,1}^{(w)} + \dots + f_{n,h}^{(w)} = x_n +$
<b>Forecast error</b>	$e_{n,h}^{(x)} = e_{n,1}^{(w)} + e_{n,2}^{(w)} + \dots + e_{n,h}^{(w)} = \varepsilon_{n+1} + \sum_{j=1}^{h-1} (1 + \beta) \varepsilon_{n+j}$	$\beta \varepsilon_n + hc + e_{n,1}^{(w)} + \dots + e_{n,h}^{(w)} = \varepsilon_{n+1} + \sum_{j=1}^{h-1} (1 + \beta) \varepsilon_{n+j}$
<b>Var. of the forecast error</b>	$\text{Var} [ e_{n,h}^{(x)} ] = (h-1) (1 + \beta)^2 \sigma^2 + \sigma^2$	$\text{Var} [ e_{n,h}^{(x)} ] = (h-1) (1 + \beta)^2 \sigma^2 + \sigma^2$

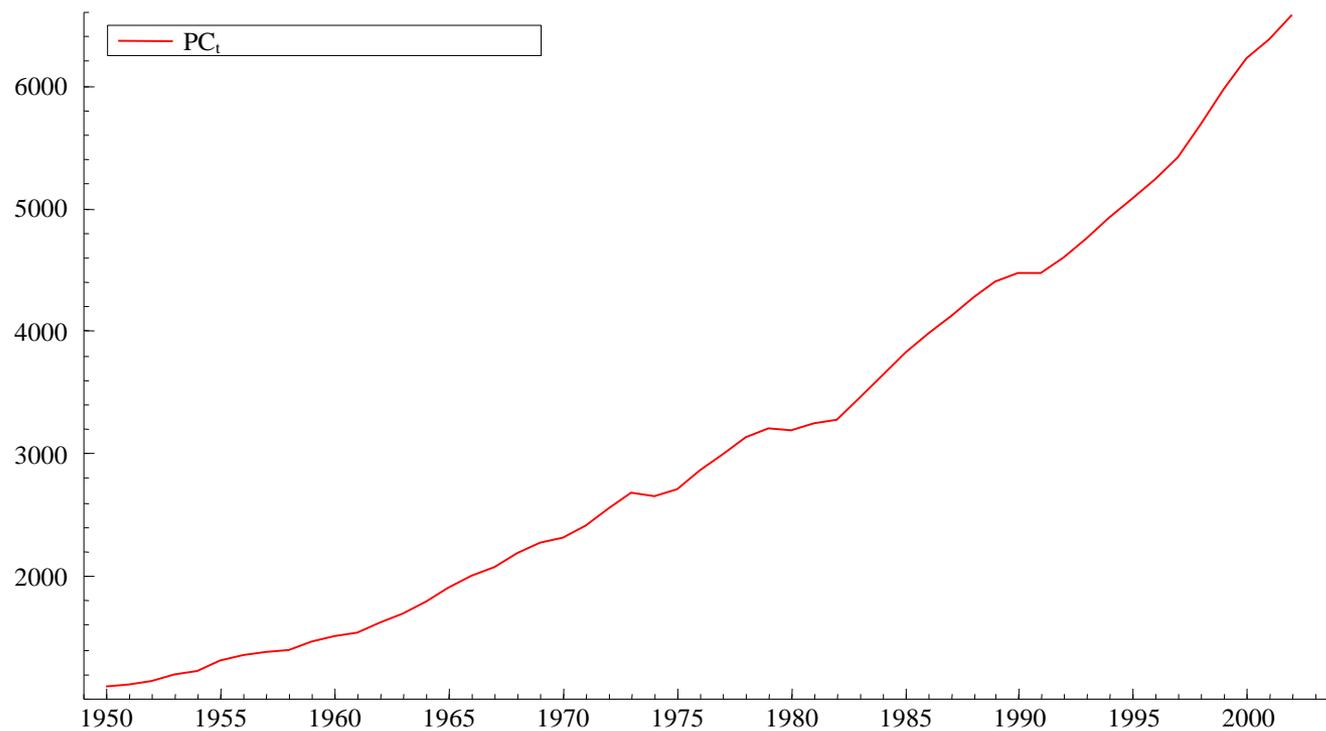
If  $x_t$  is I (1, 1) given by an IMA (1,1) model

$$x_t = x_{t-1} + c + \beta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.67)$$

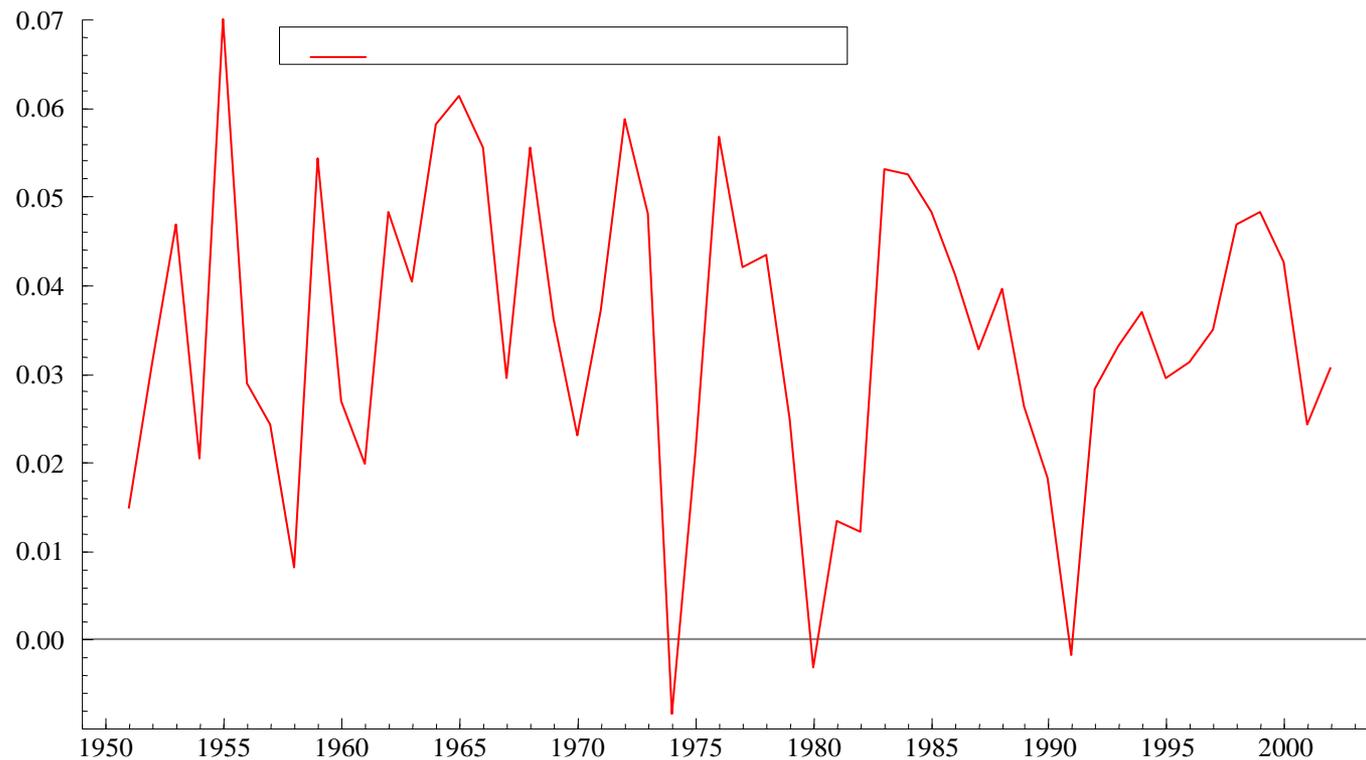
equation (3.62) is also valid even when now

$$f_{n,h}^{(x)} = x_n + hc + \beta \varepsilon_n, \quad (3.68)$$

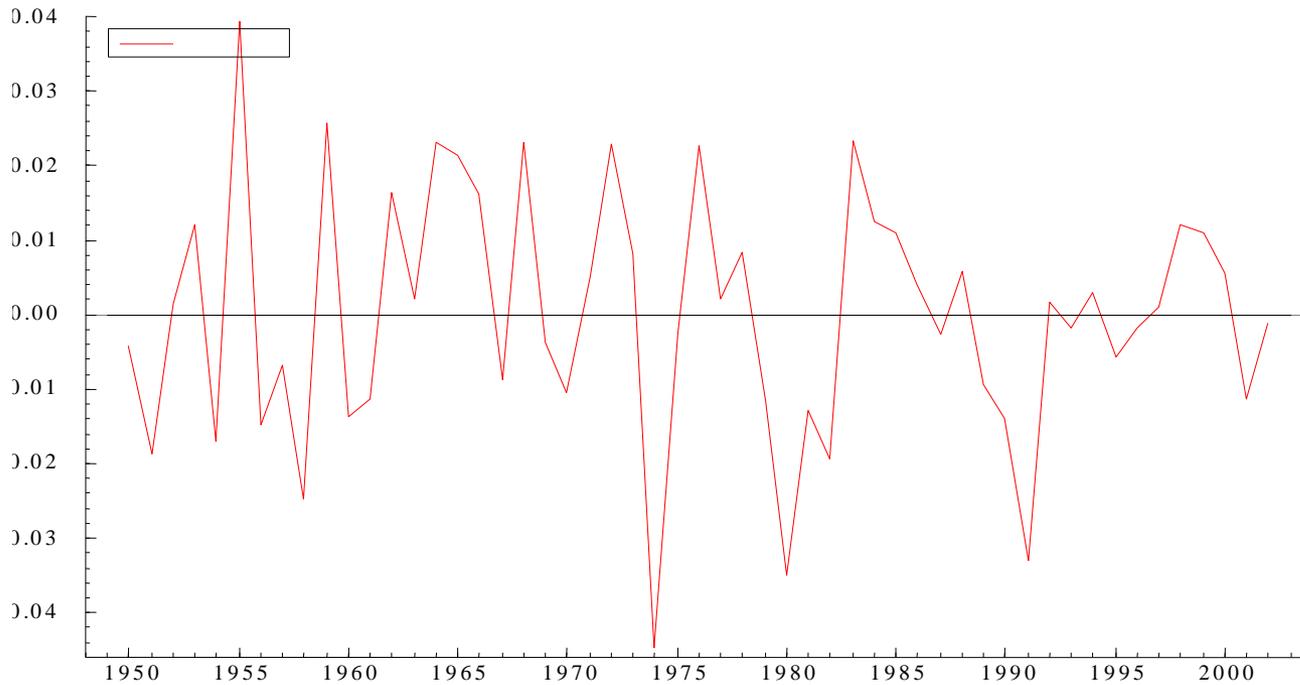
**Figure 3.9. Annual Personal consumption expenditure in USA in real terms, 1950-2002 ( $PCE_t$ ).**



**Figure 3.10.  $\Delta \log PCE_t$**



**Figure 3.11. Residuals of Annual Personal consumption expenditure from a IMA (1,1) with constant term.**



# IMA(2,1)

## CURSO DE PREDICCIÓN

### ACUMULACION DE ERRORES EN PROCESOS I (2)

Ejemplo: 
$$X_t = X_{t-1} + (X_{t-1} - X_{t-2}) + a_t \quad (1)$$

De (1) se desprende que

$$\Delta X_t = \Delta X_{t-1} + a_t \quad (2)$$

$$\Delta^2 X_t = W_t = a_t$$

Para ver la acumulación de las innovaciones en  $X_t$  vamos en (1) a sustituir el nivel  $X_{t-1}$  y el crecimiento  $\Delta X_{t-1}$  por sus valores según (1) y (2)

$$X_t = X_{t-1} + (X_{t-1} - X_{t-2}) + a_t$$

$$\begin{aligned} X_t &= a_t + a_{t-1} + \Delta X_{t-2} + a_{t-1} + \Delta X_{t-2} + X_{t-2} \\ &= a_t + 2a_{t-1} + 2[a_{t-2} + \Delta X_{t-3}] + a_{t-2} + \Delta X_{t-3} + X_{t-3} \\ &= a_t + 2a_{t-1} + 3a_{t-2} + 3\Delta X_{t-3} + X_{t-3} \end{aligned}$$

Las innovaciones se van acumulando con coeficientes que crecen linealmente

$\Delta X_{t+r}$ 

:Es una serie I(1) y por tanto integra componentes estacionarios (sumas finitas de innovaciones) que en este ejemplo son meros ruidos blancos o innovaciones contemporáneas

$$\Delta X_{t+r} = \Delta X_t + a_{t+1} + a_{t+2} + \dots + a_{t+r}$$

$X_{t+r}$ 

: Es una serie I (2) y por tanto integra innovaciones y crecimientos que son variables (integradas) que integran componentes estacionarios, en este ejemplo ruidos blancos

$$X_{t+r} = X_t + \Delta X_{t+r-1} + \Delta X_{t+r-2} + \dots + \Delta X_t + \left. \begin{array}{l} \text{Destacar la diferencia con} \\ \text{variables I (1,1)} \end{array} \right|$$
$$a_{t+r} + a_{t+r-1} + a_{t+r-2} + a_{t+1}$$

$$X_t = a_{t+1} + a_{t+2} + a_{t+3} + \dots + a_{t+r-2} + a_{t+r-1} + a_{t+r}$$

$$\begin{array}{rcl}
 a_{t+1} + a_{t+2} + a_{t+3} + \dots + a_{t+r-2} + a_{t+r-1} & & + \Delta X_t \\
 a_{t+1} + a_{t+2} + a_{t+3} + \dots + a_{t+r-2} & & + \Delta X_t \\
 \vdots & & + \Delta X_t \\
 a_{t+1} & & + \Delta X_t
 \end{array}$$

Sumando

---

$$X_{t+r} = X_t + r\Delta X_t + ra_{t+1} + (r-1)a_{t+2} + \dots + 3a_{t+r-2} + 2a_{t+r-1} + a_{t+r}$$

### 3) $x_t$ : I (2, 0) plus stationary MA(1) deviations.

$$x_t = x_{t-1} + (x_{t-1} - x_{t-2}) + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}. \quad (3.69)$$

Model (3.69) is an IMA (2,1) model

In this case an innovation  $\varepsilon_t$  has a linearly increasing weight in future values of  $x_t$ .  
In this case the increments of  $x_t$

$$\Delta x_t = \Delta x_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-2} \quad (3.69 \text{ bis})$$

are nonstationary with an IMA (1,1) structure.

The stationary transformation is given by

$$\Delta^2 x_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}.$$

In some cases  $x_t$  could follow an I (2,0) model with a stationary MA(1) component:

$$x_t = x_{t-1} + (x_{t-1} - x_{t-2}) + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}. \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} x_{n+h} &= x_{n+h-1} + \Delta x_{n+h-1} + w_{n+h} \\ &= x_{n+h-1} + \Delta x_n + w_{n+1} + \dots + w_{n+h-1} + w_{n+h} \\ &= x_n + h \Delta x_n + \sum_{j=1}^h (h+1-j) w_{n+j}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Consequently

$$f_{n,h}^{(x)} = x_n + h \Delta x_n + \sum_{j=1}^h (h+1-j) f_{n,j}^{(w)} \quad (3.71)$$

and

$$e_{n,h}^{(x)} = \sum_{j=1}^h (h+1-j) e_{n+j}^{(w)} .$$

$$e_{n,h}^{(x)} = \varepsilon_{n+1} + \sum_{j=2}^h (h+1-j) \left[ \varepsilon_{n+j} + \beta \varepsilon_{n+j-1} \right] \quad (3.72)$$

$$w_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (3.73)$$

$$f_{n,1} = \beta_1 \varepsilon_n + \beta_2 \varepsilon_{n-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{n-q+1}, \quad (3.74)$$

$$e_{n,1} = w_{n+1} - f_{n,1} = \varepsilon_{n+1} \quad . \quad (3.75)$$

$$\hat{\varepsilon}_t = w_t - f_{t-1,1}. \quad (3.76)$$

The forecast errors are given by

$$\varepsilon_{n,h} = \sum_{j=1}^h \beta_{j-1} \varepsilon_{n+h+1-j}, \quad h \leq q, \quad (3.77)$$

where  $\beta_0 = 1$ . And for horizons longer than  $q$

$$\varepsilon_{n,h} = \varepsilon_{n+h} + \beta_1 \varepsilon_{n+h-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{n+h-q}. \quad (3.78)$$

- 1) The price index shows systematic growth.
- 2) The annual rate of growth of this price index, approximated by  $\Delta x_t$ , is nonstationary. It shows local oscillations in levels.
- 3) Both  $x_t$  and  $\Delta x_t$  deviate from their corresponding evolution paths by a stationary component which follows an MA(1) structure.
- 4) The stationary transformation of this data is obtained by

$$\Delta^2 x_t = w_t = \varepsilon_t + 0.6 \varepsilon_{t-1},$$

where  $\Delta^2 x_t$  can be interpreted as the acceleration rate of this price index.

5) The innovation  $\varepsilon_t$  in a particular year affects  $\Delta^2 x_t$  this year with unit weight and the next with weight 0.6.

6) In forecasting  $\Delta^2 x_t$ , the forecasts are given by

$$f_{n,1}^{(w)} = 0.6\varepsilon_n \text{ and}$$

$$f_{n,h}^{(w)} = 0, \quad h > 0.$$

The corresponding errors  $e_{n,1}^{(w)}$  and  $e_{n,h}^{(w)}$ ,  $h > 1$ , have a standard deviation of 0.001 in the first case and 0.0012 in the second. The uncertainty about  $\Delta^2 x_t$  in the long run is limited by this standard deviation of 0.0012.

7) The forecasts of the rate of growth of this price index are given by

$$f_{n,h}^{(\Delta x)} = \Delta x_n + \beta \varepsilon_n, \quad \forall h.$$

The forecast errors have a variance given by

$$\text{Var} \{ e_{n,h}^{(\Delta x)} \} = \sigma^2 + (h-1) (1 + \beta)^2 \sigma^2,$$

which increases linearly with the horizon.

8) The forecasts of  $x_t$  are given by

$$f_{n,h}^{(x)} = x_n + h\Delta x_n + \sum_{j=1}^h (h+1-j) f_{n,j}^{(w)},$$

and the variance of the forecast errors increases quadratically with the horizon  $h$ .

- Predicción con modelos AR. Ejemplos
- Predicción con modelos autorregresivos y de medias móviles. Ejemplos.
- Repaso del tema: Metodología Box–Jenkins para la construcción de modelos de series temporales.
- La predicción con modelos ARIMA. Esperanza matemática condicional y errores de predicción (innovaciones).
- Errores en la predicción con varios períodos de antelación.
- Varianza de los errores de predicción e intervalos de confianza.
- Importancia económica de la predicción.
- Presentación de los resultados de la aplicación de estos modelos en el proyecto de cada grupo.

- **PREDICCIÓN CON  
MODELOS AR(p)**

# MODELOS AUTORREGRESIVOS CON CONSTANTE

$$W_t = c + \phi_1 W_{t-1} + \dots + \phi_p W_{t-p} + a_t \quad (1)$$

En este caso la esperanza matemática de  $W_t$ , digase  $\mu$ , no es la constante  $c$ .

De (1) se tiene que

$$E(W_t) = c + \phi_1 E(W_{t-1}) + \dots + \phi_p E(W_{t-p}) + 0,$$

Con lo que

$$\mu = c + \phi_1 \mu + \dots + \phi_p \mu,$$

Es decir

$$\mu = c / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$$

**El modelo se puede escribir como**

$$W_t = \mu + \phi_1 (W_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p (W_{t-p} - \mu) + a_t \quad (1bis)$$

En (1bis) todos los regresores tienen media cero.

# PROCEDIMIENTO DE PREDICCIÓN CON UN AR(1)

- La predicción –como ocurre en toda serie temporal- ha de hacerse **de modo secuencial**, empezando por horizonte 1, luego a horizonte 2 y así sucesivamente.
- Como se aprecia en (1bis) se puede **hacer la predicción suponiendo que los retardos tienen media cero. Posteriormente**, para los casos en los que la media del proceso no es **nula habrá que añadir  $\mu$  a la predicción.**

## PREDICION A HORIZONTE UNO.

Forecasting from model AR(1) is easily achieved.

Periodo base de la predicción n:

first consider how **the next value** will be generated when at time n,

**Valor real cuando se observe:**

$$w_{n+1} = \alpha w_n + \varepsilon_{n+1}.$$

The first term is known, provided we are given a value for  $\alpha$ , but the second term is not known from the information set  $I_n: w_{n-j}, j \geq 0$ . Thus **the optimum forecast of  $w_{n+1}$  is clearly**

**La predicción es la esperanza matemática condicional respecto a n.**

$$f_{n,1} = \alpha w_n.$$

## PREDICION A HORIZONTE 2:

**Valor real cuando se observe:**

$$w_{n+2} = \alpha w_{n+1} + \varepsilon_{n+2}.$$

$$W_{n+2} = \alpha W_{n+1} + \varepsilon_{n+2}.$$

The second term in the rhs is not known and so should be replaced by its optimum forecast made at time  $n$ , which is just zero. **The first term is not known, but it can be forecast** when at time  $n$ , giving the two-step forecast

En este caso la esperanza matemática condicional a lo observado hasta  $n$  (la predicción) es:

$$f_{n,2} = \alpha^2 w_n.$$

- **Predicción a horizonte 3:**

Valor real cuando se observe:

$$W_{n+3} = \alpha W_{n+2} + \varepsilon_{n+3}$$

- sustituyendo  $W_{n+2}$  por su predicción:

- $f_{n,3} = \alpha^3 W_n,$

- **En general para horizonte h:**

- $f_{n,h} = \alpha^h W_n.$

- **La predicción decrece exponencialmente (colea hasta el infinito) a su media  $\mu$ , que puede ser cero.**

## CALCULO DE LOS ERRORES DE PREDICCIÓN:

Valor real cuando se observe:

$$w_{n,h} = \alpha^h w_n + (\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1}) \quad (3.103)$$

El error de predicción:

$$\begin{aligned} e_{n,h} &= (\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1}). \\ &= \sum_{i=1}^h \alpha^{h-i} \varepsilon_{n+i} \end{aligned} \quad (3.104)$$

La complejidad del error depende del horizonte y las correspondientes varianzas vienen dadas por:

$$\text{Var}(e_{n,h}) = [1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots + \alpha^{2(h-1)}] \sigma^2 = \sigma^2 \frac{1 - \alpha^{2h}}{1 - \alpha^2} \quad (3.105)$$

La varianza aumenta con el horizonte, pero con un límite. De hecho

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [\text{Var}(e_{n,h})] = \text{var}(w_{t+h}) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}$$

En (103)

$$w_{n,h} = \alpha^h w_n + (\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1})$$

la media condicional respecto al pasado hasta  $(n+h-1)$  es

$$E^c(w_{n+h}) = \alpha^h w_n + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1} \quad (3.106)$$

La media condicional respecto el pasado hasta  $n$  es

$$\alpha^h w_n .$$

Es siempre conocida por grande que sea el horizonte, en cuyo caso su valor será despreciable.

# SIMILITUDES Y DIFERENCIAS CON LOS MODELOS MA(q) y ARMA(p,q).

- La predicción tiende a la media marginal, pero no lo hace a partir de  $h=q+1$ , sino de forma convergente hacia el infinito. Hay un momento finito  $n+h+r$  en el que la convergencia se ha logrado prácticamente.
- Por tanto, la varianza del error de predicción va creciendo hacia un valor asintótico que es la varianza de la variable.
- La predicción con cualquier modelo ARMA tiene también estas propiedades, lo que cambia es la forma de converger la predicción a la media y la varianza a su valor asintótico.

# EL ERROR DE PREDICCIÓN EN UN MODELO ARMA ESTACIONARIO

Predicción a un horizonte h

-Verdadero valor  $W_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots$

$$W_{n+h} = \mu + a_{n+h} + \psi_1 a_{n+h-1} + \psi_2 a_{n+h-2} + \dots + \psi_h a_n + \psi_{h+1} a_{n-1} + \dots \quad (1)$$

-Predicción

$$\hat{W}_{n+h} = \mu + \psi_h a_n + \psi_{h+1} a_{n-1} + \dots \quad (2)$$

Error de predicción

$$e(h) = W_{n+h} - \hat{W}_{n+h} = a_{n+h} + \psi_1 a_{n+h-1} + \dots + \psi_{h-1} a_{n+1}$$

-Varianza del error de predicción

$$\sigma_h^2 = \sigma^2 \left[ 1 + \sum_{j=1}^{h-1} \psi_j^2 \right]$$

-Varianza del error de predicción a largo plazo

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_h^2 = \sigma^2 \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 \right] = \gamma_0$$

# PROPIEDADES DE LOS ERRORES DE PREDICCIÓN DE UNA VARIABLE ESTACIONARIA

- Tienen media cero.
- Los errores a horizonte 1 ,  $e(1)$  , son las correspondientes innovaciones y , por tanto ,son ruido blanco .
- Para  $h=1$  la varianza del error es **la varianza residual** ( la varianza condicional de la variable estacionaria) .
- La varianza del error de predicción **aumenta con el horizonte hasta alcanzar la varianza de la variable estacionaria** .
- Este nivel máximo de incertidumbre se alcanza de forma convergente en el caso de que el modelo tenga un componente AR(p).
- **La secuencia de errores de predicción en base  $n$  a diferentes horizontes  $h$  no son independientes:**  $e(h)$  ,  $h > 1$ ,siguen un proceso MA(h-1).

- **PREDICCIÓN CON  
MODELOS  
 $I(1,0), ARI(p,1)$**

Supongase  $x_t$  que es  $I(1,0)$  y sus incrementos siguen un **AR(1)**.

$$x_t = x_{t-1} + w_t, \quad (3.107a)$$

$$w_t = \alpha w_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (3.107b)$$

$$w_t = \Delta x_t,$$

$x_t$  se puede escribir como:

$$x_t = x_{t-1} + \alpha \Delta x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.108)$$

El modelo I (1,0) se puede escribir como:

$$X_{n+h} = X_n + W_{n+1} + W_{n+2} + \dots + W_{n+h}. \quad (3.109)$$

En el caso de ARI (1,1)  $w_t = \Delta x_t$  con lo que:

$$w_{n,h} = \alpha^h w_n + (\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1})$$

$$\begin{aligned} X_{n+h} = & X_n + \alpha^h \Delta X_n + [\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1}] + \\ & + \alpha^{h-1} \Delta X_n + [\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-2} \varepsilon_{n+1}] + \\ & \dots \dots \dots \\ & + \alpha^2 \Delta X_n + [\varepsilon_{n+2} + \alpha \varepsilon_{n+1}] + \\ & + \alpha \Delta X_n + [\varepsilon_{n+1}]. \end{aligned} \quad (3.110)$$

En (3.110) los términos entre paréntesis son impredecibles . La predicción es.

$$f_{n,h}^{(x)} = x_n + \alpha^h \Delta x_n + \alpha^{h-1} \Delta x_{n-1} + \dots + \alpha \Delta x_n.$$

Los errores de predicción:

$$e_{n,h}^{(x)} = \sum_{j=1}^h e_{n,j}^{(w)} = \sum_{j=1}^h \left[ \sum_{i=1}^j \alpha^{(j-i)} \varepsilon_{n+i} \right] \quad (3.111)$$

In (3.111) the first summation refers to the errors in forecasting each  $w_{n+j}$ ,  $j=1, \dots, h$  component which appear in (3.109) and the second summation refers to all the future white noise elements which according with (3.104) compound the forecasting error of each  $w_{n+j}$ .

Los  $h$  componentes  $e_{n,j}^{(w)}$  en (3.111) no son independientes. Es conveniente reordenarlos así:

$$e_{n,j}^{(x)} = \sum_{j=1}^h \left[ \left( \sum_{i=0}^{h-j} \alpha^i \right) \varepsilon_{n+j} \right] \quad (3.112)$$

Ahora los términos en los paréntesis cuadrados en (3.112) son independientes.

$$e_{n,h}^{(x)}$$

En el cálculo de la varianza de  $e_{n,h}^{(x)}$  se puede observar en (3.112) que aumentando el horizonte la varianza de los términos entre paréntesis tienden a una constante.

En consecuencia, como el primer sumatorio aumenta con el horizonte, la varianza de  $e_{n,h}^{(x)}$  aumenta sin límite. El crecimiento es lineal con  $h$ .

# LA PREDICCIÓN CON MODELOS ARI(p,1)

- La predicción de  $X_{n+h}$  va incorporando al último valor observado nuevos términos de forma convergente hacia un valor asintótico.
- La convergencia depende de las raíces del polinomio autoregresivo.
- La varianza del error de predicción crece sin límite.

- **PREDICCIÓN CON  
MODELOS  
I(1,1), ARI(p,1)**

El modelo I (1,1) se puede escribir como:

$$x_{n+h} = x_n + h\mu + w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_{n+h}. \quad (3.109)$$

En el caso de ARI (1,1)  $w_t = (\Delta x_t - \mu)$  con media igual a cero con lo que:

$$w_{n,h} = \alpha^h w_n + (\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1})$$

$$\begin{aligned} x_{n+h} = & h\mu + x_n + \alpha^h (\Delta x_n - \mu) + [\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1}] + \\ & + \alpha^{h-1} (\Delta x_n - \mu) + [\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-2} \varepsilon_{n+1}] + \\ & \dots\dots\dots \\ & + \alpha^2 (\Delta x_n - \mu) + [\varepsilon_{n+2} + \alpha \varepsilon_{n+1}] + \\ & + \alpha (\Delta x_n - \mu) + [\varepsilon_{n+1}]. \quad (3.110) \end{aligned}$$

- **PREDICCIÓN CON  
MODELOS  $ARI(p,2)$**

# De forma similar podemos considerar un **modelo ARI(p,2)**

$$\begin{aligned}x_t &= x_{t-1} + \Delta x_{t-1} + w_t \\ &= x_{t-1} + \Delta x_{t-1} + \alpha \Delta^2 x_{t-1} + \varepsilon_t.\end{aligned}\quad (3.113)$$

Un índice de producción industrial anual podría seguir un modelo de este tipo.

Tomando el modelo como cierto y haciendo  $x_t = IIP_t$ , el modelo (3.113) nos dice que la transformación estacionaria de  $IIP_t$  es  $\Delta^2 IIP_t = w_t$ , que viene determinada por un proceso AR(1) model. Por lo visto para procesos AR(1) estacionarios, la predicción de  $\Delta^2 IIP_{t+h}$  es

$$f_{n,h}^{(\Delta^2 IIP)} = \alpha^h (\Delta^2 IIP_t)$$

Los errores de predicción vienen dados por (3.104).

$$e_{n,h} = (\varepsilon_{n+h} + \alpha \varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1}) = \sum_{i=1}^h \alpha^{h-i} \varepsilon_{n+i}$$

La varianza de las predicciones tiende a la constante  $\gamma_0$  definida en (3.10).

$$\text{Var}(e_{n,h}) = [1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots + \alpha^{2(h-1)}] \sigma^2 = \sigma^2 \frac{1 - \alpha^{2h}}{1 - \alpha^2}$$

En este ejemplo  $\Delta IIP_t$  es no-estacionaria  $I(1,0)$ .

La predicción de  $\Delta IIP_t$  are viene dada por

$$f_{n,h}^{(\Delta IIP)} = \Delta IIP_n + \alpha^h \Delta^2 IIP_n + \alpha^{h-1} \Delta^2 IIP_{n-1} + \dots + \alpha \Delta^2 IIP_n$$

Los correspondientes errores de predicción vienen dados por (3.111)

$$e_{n,h}^{(x)} = \sum_{j=1}^h e_{n,j}^{(w)} = \sum_{j=1}^h \left[ \sum_{i=1}^j \alpha^{(j-i)} \varepsilon_{n+i} \right]$$

sus varianzas crecen linealmente con  $h$ .

Para la predicción de  $IIP_{n+h}$  considérese que

$$IIP_t = IIP_{t-1} + \Delta IIP_t + w_t$$

y procediendo de forma recursiva ahora se tiene que

$$IIP_{n+h} = IIP_n + h \Delta IIP_n + \sum_{j=1}^h (h+1-j) w_{n+j}$$

Consecuentemente

$$f_{n,h}^{(IIP)} = IIP_n + h \Delta IIP_n + \sum_{j=1}^h (h+1-j) f_{n,j}^{(w)}$$

y los errores de predicción vienen dados por

$$e_{n,h}^{(IIP)} = \sum_{j=1}^h (h+1-j) e_{n,j}^{(w)}$$

Las varianzas y covarianzas de estos errores de predicción, excepto la varianza para horizonte 1, son sumas ponderadas de varianzas and covarianzas de términos en los que sus ponderaciones incluyen  $h^2$ . Por tanto, en este caso la varianza **de los errores de predicción de la variable ARI(1,2) aumenta de forma cuadrática con el horizonte h.**

**CALCÚLESE LA VARIANZA DEL ERROR PARA HORIZONTE 1.**

# LAS FUNCIONES DE PREDICCIÓN PARA PROCESOS AR(1), ARI(1,1) Y ARI(2,1)

- **AR(1)**  $f_{n,h} = \alpha^h w_n + \mu$

$$\begin{aligned}
 x_{n+h} = & \quad x_n + \alpha^h \Delta x_n + [\varepsilon_{n+h} + \alpha \varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1}] + \\
 & \quad + \alpha^{h-1} \Delta x_n + [\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-2} \varepsilon_{n+1}] + \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & \quad + \alpha^2 \Delta x_n + [\varepsilon_{n+2} + \alpha \varepsilon_{n+1}] + \\
 & \quad + \alpha \Delta x_n + [\varepsilon_{n+1}].
 \end{aligned}$$

# LAS FUNCIONES DE PREDICCIÓN PARA PROCESOS AR(1), ARI(1,1) Y ARI(2,1)

- **AR(1)**  $f_{n,h} = \alpha^h w_n + \mu$

$$\begin{aligned}
 x_{n+h} = & x_n + \alpha^h \Delta x_n + [\varepsilon_{n+h} + \alpha \varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1}] + \\
 & + \alpha^{h-1} \Delta x_n + [\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-2} \varepsilon_{n+1}] + \\
 & \dots\dots\dots \\
 & + \alpha^2 \Delta x_n + [\varepsilon_{n+2} + \alpha \varepsilon_{n+1}] + \\
 & + \alpha \Delta x_n + [\varepsilon_{n+1}].
 \end{aligned}$$

$$f_{n,h}^{(IIP)} = IIP_n + h \Delta IIP_n + \sum_{j=1}^h (h+1-j) f_{n,j}^{(w)}$$

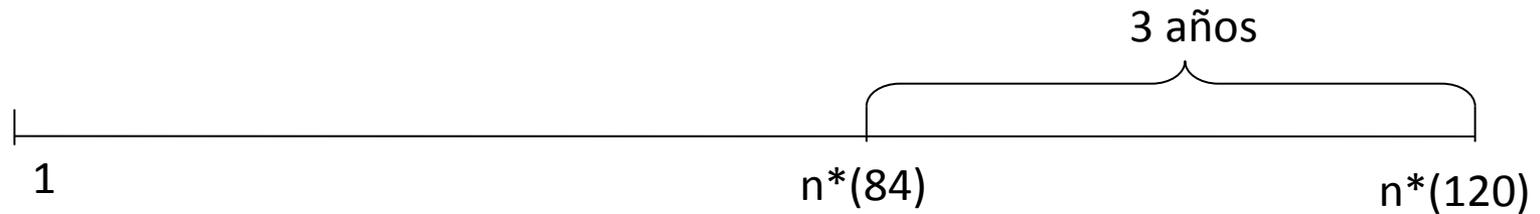
# Diferencias entre las predicciones de los modelos I(1,1) e I(2,0).

- $IIP_t = IIP_{t-1} + \Delta IIP_t + w_t$
- $IIP_t = IIP_{t-1} + c + w_t$
  
- $IIP_{n+h} = IIP_n + h \Delta IIP_n + (h+1-j) w_{n+j}$
- $IIP_{n+h} = IIP_n + h c + (h+1-j) w_{n+j}$

# MEDIDA DE PRECISIÓN DE LAS PREDICCIONES

- Se realiza a partir de una función de pérdida.
- El tipo de función de pérdida depende de la naturaleza del problema .
- En general ,la más usada es la raíz cuadrada del error cuadrático medio (recm) .

# Ejemplo de evaluación de las predicciones



Base	Predicciones
$n^*(84)$	$X_{n(85)}, X_{n(86)}, \dots, X_{n(96)}$
$n^*(85)$	$X_{n(86)}, X_{n(87)}, \dots, X_{n(97)}$
.	.
.	.
.	.
$n^*(108)$	$X_{n(109)}, X_{n(110)}, \dots, X_{n(120)}$

## COMPARACION DE PREDICCIONES

- Una predicción es más precisa que otra si su  $recm$  es inferior .
- El problema radica en contrastar que la diferencia entre  $recm$ 's es significativamente distinta de cero . Contraste de Diebold y Mariano (1995) o Capistran.
- Mejor contrastar el mejor modelo sobre toda la muestra.

# LA FUNCION DE PREDICCION A LARGO PLAZO

- Véase Espasa y Cancelo (eds.) 1993, *Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*. Alianza editorial.
- Todos los resultados que se presentan a continuación sobre modelos no estacionarios más un componente estacionario, **se generalizan para cualquier estructura ARMA**. Lo único que cambia es el proceso mediante al que se llega a la estructura de largo plazo.

# LA FUNCION DE PREDICCIÓN A LARGO PLAZO

- Todos los modelos de predicción deben incluir factores capaces de **explicar todas las facetas de los datos**.
- Cuando se desea una **predicción a medio plazo** la frecuencia mensual o trimestral puede ser adecuada. La inclusión de **variables para explicar la tendencia** son muy importantes.
- En problemas de **muy corto plazo** la frecuencia deseada puede ser la diaria o horaria. Una explicación de la tendencia basada en **raíces unitarias** sobre el propio pasado puede ser conveniente. El modelo debe concentrarse en incluir **variables para explicar el corto plazo**.

# Las funciones de predicción a largo plazo de **AR(1)** Y **ARI(1,1)** sin constante.

- **AR(1)** tiende a un valor fijo  $\mu$  (VALOR DE EQUILIBRIO) independiente del momento de realizar la predicción. Se generaliza para cualquier proceso estacionario.
- **ARI(1,1) sin constante** en cada momento  $n$  la predicción tiende a una constante (VALOR DE EQUILIBRIO) que depende de las condiciones iniciales, de los valores en  $n$ . Se generaliza para cualquier proceso **ARIMA(p,1,q)**.



# MODELO ARI(1,1) CON CONSTANTE

# EJERCICIO

## DESARROLLE EL RESULTADO PARA UN ARI(1,1) CON CONSTANTE.

- Siga la pista que se da en la diapositiva siguiente y
- Calcule las predicciones de la variable original y de su tasa de crecimiento para diferentes horizontes, los correspondientes errores y sus respectivas varianzas, señalando en cada caso el límite de tales varianzas cuando el horizonte tiende a infinito.

## FORMULACIÓN DEL MODELO I(1,1) PARA EL MOMENTO (n+h) EN FUNCIÓN DEL VALOR EN n.

- Vamos a proceder como en la ecuación (109) pero teniendo en cuenta que ahora  $\Delta X_t$ , que es estacionaria, tiene una media  $\mu$  distinta de cero.
- Si llamamos  $w_t^*$  a la transformación estacionaria se tiene que  $w_t^* = \Delta X_t - \mu = w_t + \mu$ .
- donde  $w_t$  tiene media cero, ya que
- $w_t = \Delta X_t - \mu$ .
- En la ecuación (109) referida al caso I(1,1) ahora entra  $w_t^*$  y con ello se llega directamente a la ecuación (110bis) de la diapositiva siguiente.

El modelo I (1,1) se puede escribir como:

$$x_{n+h} = x_n + h\mu + w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_{n+h}. \quad (3.109)$$

En el caso de ARI (1,1)  $w_t = (\Delta x_t - \mu)$  con media igual a cero con lo que:

$$w_{n,h} = \alpha^h w_n + (\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1})$$

$$\begin{aligned} x_{n+h} = & h\mu + x_n + \alpha^h (\Delta x_n - \mu) + [\varepsilon_{n+h} + \alpha\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-1} \varepsilon_{n+1}] + \\ & + \alpha^{h-1} (\Delta x_n - \mu) + [\varepsilon_{n+h-1} + \dots + \alpha^{h-2} \varepsilon_{n+1}] + \\ & \dots \dots \dots \\ & + \alpha^2 (\Delta x_n - \mu) + [\varepsilon_{n+2} + \alpha \varepsilon_{n+1}] + \\ & + \alpha (\Delta x_n - \mu) + [\varepsilon_{n+1}]. \quad (3.110) \end{aligned}$$

# La función de predicción a largo plazo de $ARI(1,2)$ sin constante.

- Fijado el periodo base  $n$ , debido al término

$$h\Delta IIP_n + \sum_{j=1}^h (h+1-j)f_{n,j}^{(w)}$$

que aparece en la función de predicción, se tiene que la predicción aumenta de forma lineal con el horizonte.

**SITUACION DE CRECIMIENTO EQUILIBRADO, en el que el nivel y el crecimiento dependen de las condiciones en  $n$ . Se generaliza para cualquier  $ARIMA(p,2,q)$ .**

Then the resulting model for  $X_t$  is

$$\phi_p(L)\Phi_p(L^s)(\Delta^d\Delta_s X_t - \mu(t)) = \theta_q(L)\Theta_Q(L^s)a_t \quad (3)$$

which is known as the seasonal multiplicative ARIMA model. When  $m$  equals one the time polynomial is a constant that will be denoted by  $\mu$ . In this paper we deal only with integer values for  $d$ . Calling  $\varphi_r(L) = \phi_p(L)\Phi_p(L^s)\Delta^d\Delta_s$ ;  $r = p + d + s(1 + P)$ ;  $\theta_m^*(L) = \theta_q(L)\Theta_Q(L^s)$ ;  $\rho = q + sQ$ ;  $c = \phi_p(L)\Phi_p(L^s)\mu(h)$  and  $\hat{X}_t(h)$  the prediction of  $X_{t+h}$  from the origin  $t$ , we see that this prediction is given by:

$$\hat{X}_t(h) = \sum_{i=1}^r \varphi_i \hat{X}_t(h-i) + \sum_{j=1}^v \theta_j^* a_{t+h-j} + c \quad (4)$$

where the predictions  $\hat{X}_t(h-i)$  coincide with the values observed when the horizon is negative, and the disturbances  $a_{t+h-j}$  are zero if  $h > j$  and identical to the estimated values if  $j \geq h$ .

For  $h > \rho$  the MA part of the model will have no direct effect on prediction. Consequently, for a relatively distant time horizon the so-called eventual forecast function is obtained:

$$\hat{X}_t(h) = \varphi_1 \hat{X}_t(h-1) + \dots + \varphi_r \hat{X}_t(h-r) + c \quad (5)$$

Table I. Characteristics of the long-term projection derived from the ARIMA model corresponding to an economic variable

$\delta + m$ , nature of the long-term projection <sup>a</sup>	$(\delta, m)^b$	Influence of initial conditions on the long-term projection	Uncertainty regarding long-term projection	
			On the level	On the growth rates
0. Null long-term value	(0, 0)	None	Finite	Null (growth is zero)
1. Stable long-term value	(0, 1)	None	Finite	Null (growth is zero)
	(1, 0)	Determine the equilibrium value	Infinite (it grows linearly)	Null (growth is zero)
2. Linear growth	(1, 1)	Determine the ordinate in the origin of the straight line, but have no influence on its slope	Infinite (it grows linearly)	Finite
	(2, 0)	Determine the two parameters which define the line	Infinite (it grows quadratically)	Infinite (it grows linearly)

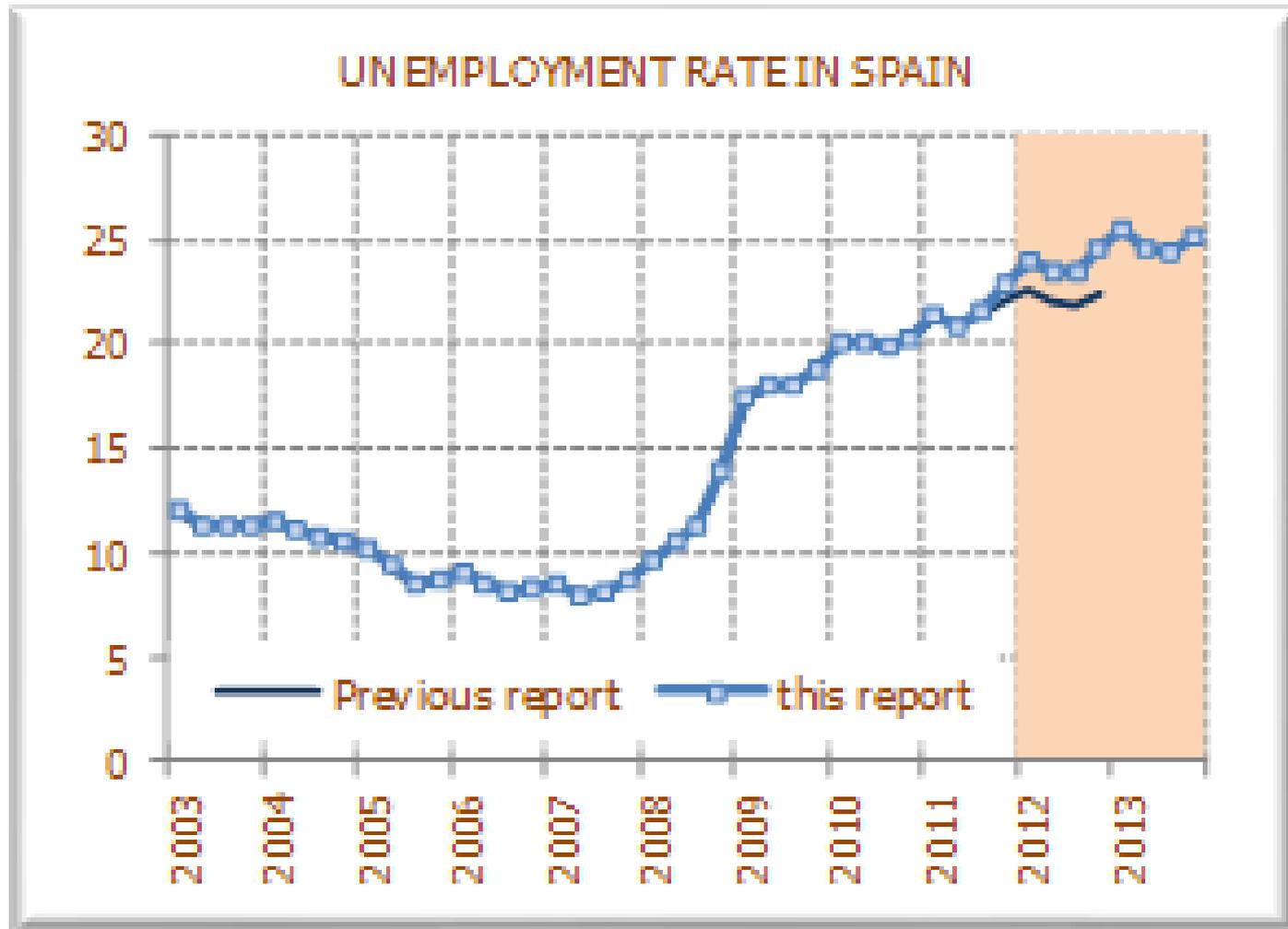
<sup>a</sup>  $\delta$  is the total number of differentiations required by the variable to become stationary.

<sup>b</sup>  $m = 0$  implies that the mathematical expectancy or the stationary series is zero.

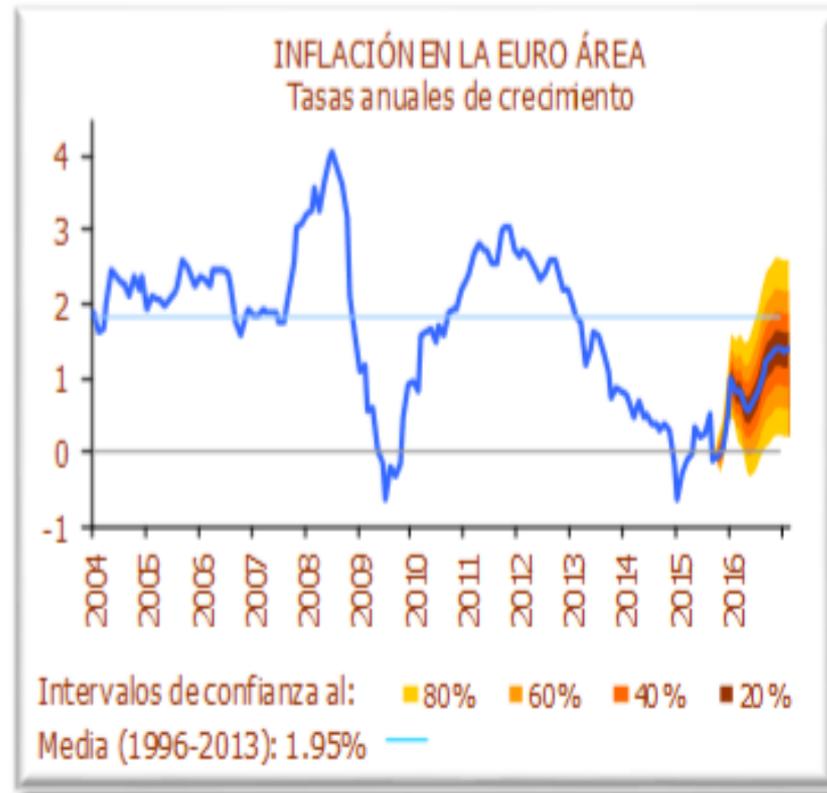
$m = 1$  implies that this mathematical expectancy is not null.

# SENDAS DE PREDICCIONES CON GRÁFICO DE ABANICO.

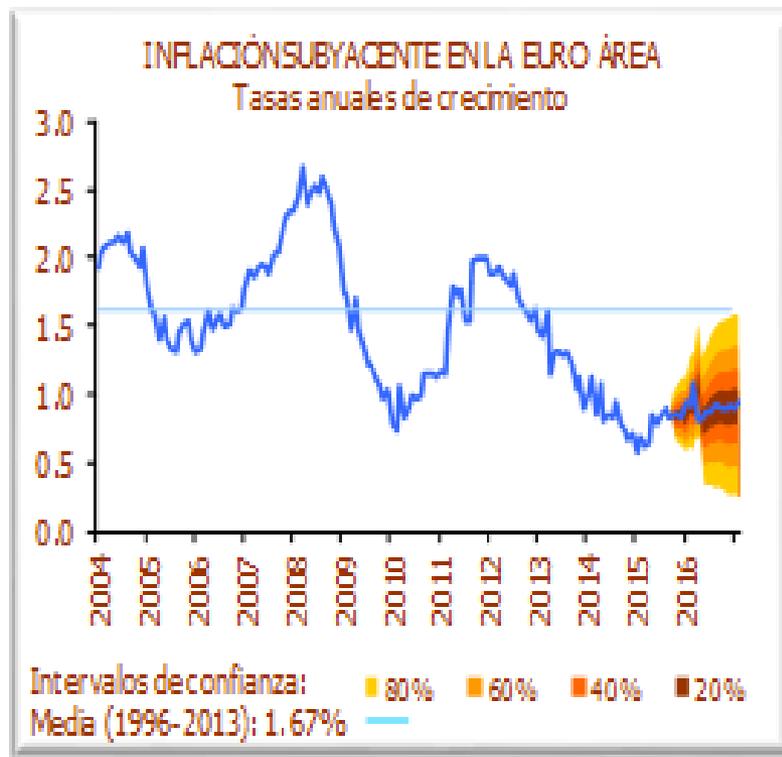
# Path forecasts



## La previsión de inflación media en la Euro Área para 2015 se sitúa en el 0.0% ( $\pm 0.10$ ).

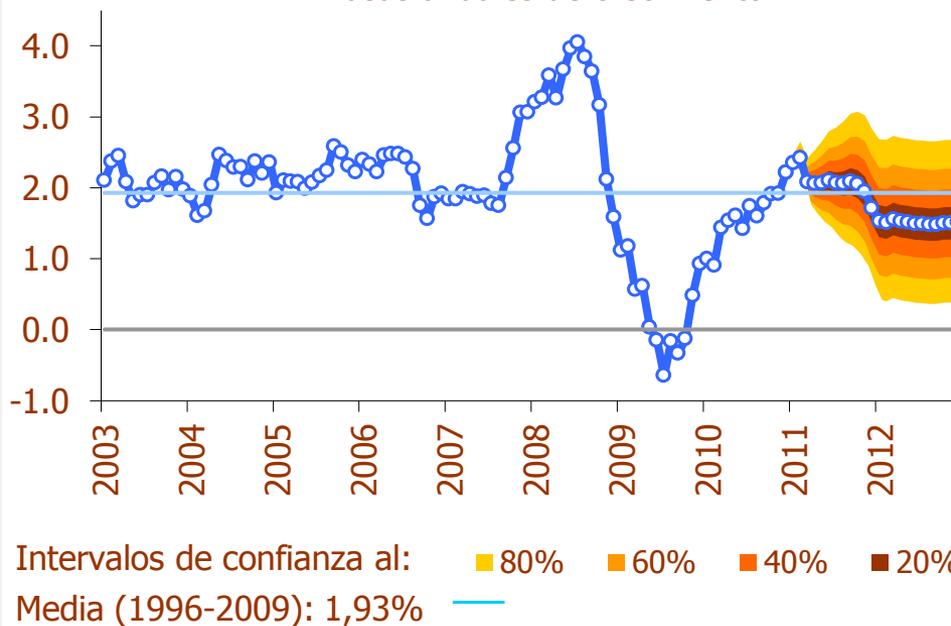


Fuente: EUROSTAT & BIAM (UC3M)  
Fecha: 16 de octubre 2015

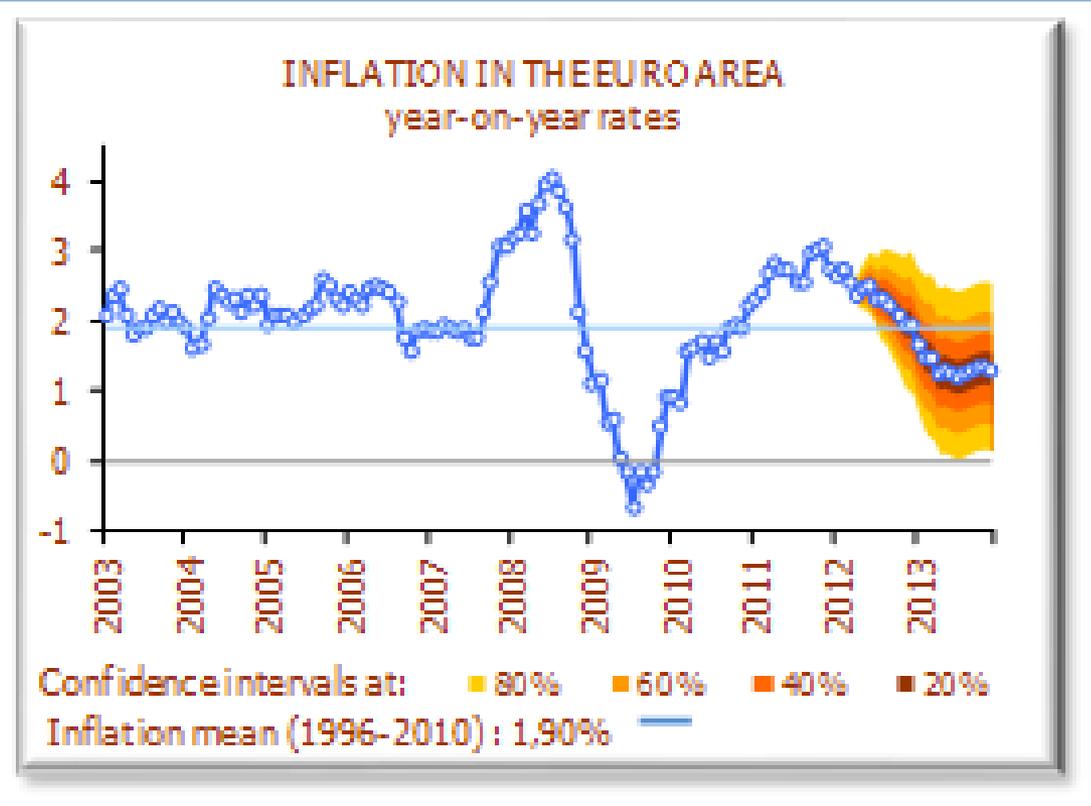


Fuente: EUROSTAT & BIAM (UC3M)  
Fecha: 16 de octubre de 2015

### INFLACIÓN EN LA EURO ÁREA Tasas anuales de crecimiento

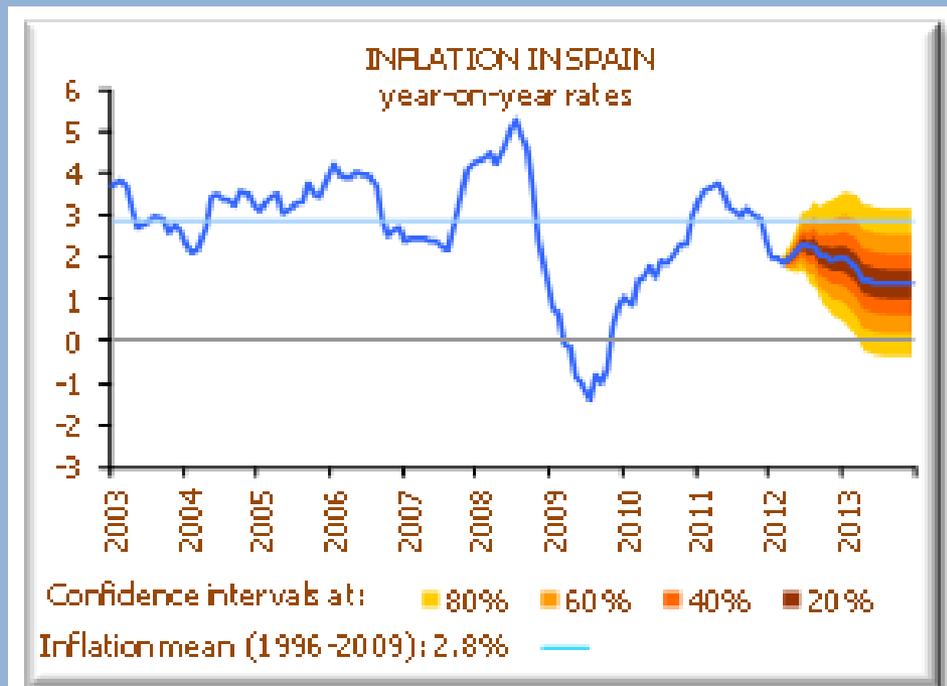


Fuente: EUROSTAT & BIAM(UC3M)  
Fecha: 14 de enero de 2011



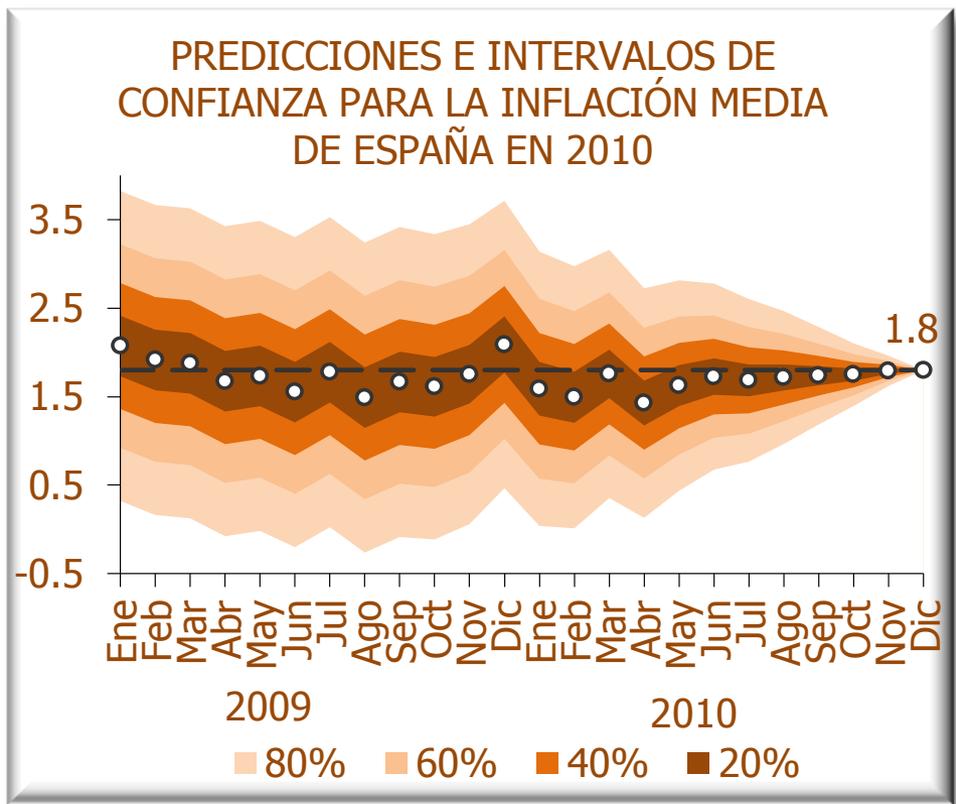
Source: EUROSTAT & BIAM(UC3M)

Date: March 29, 2012

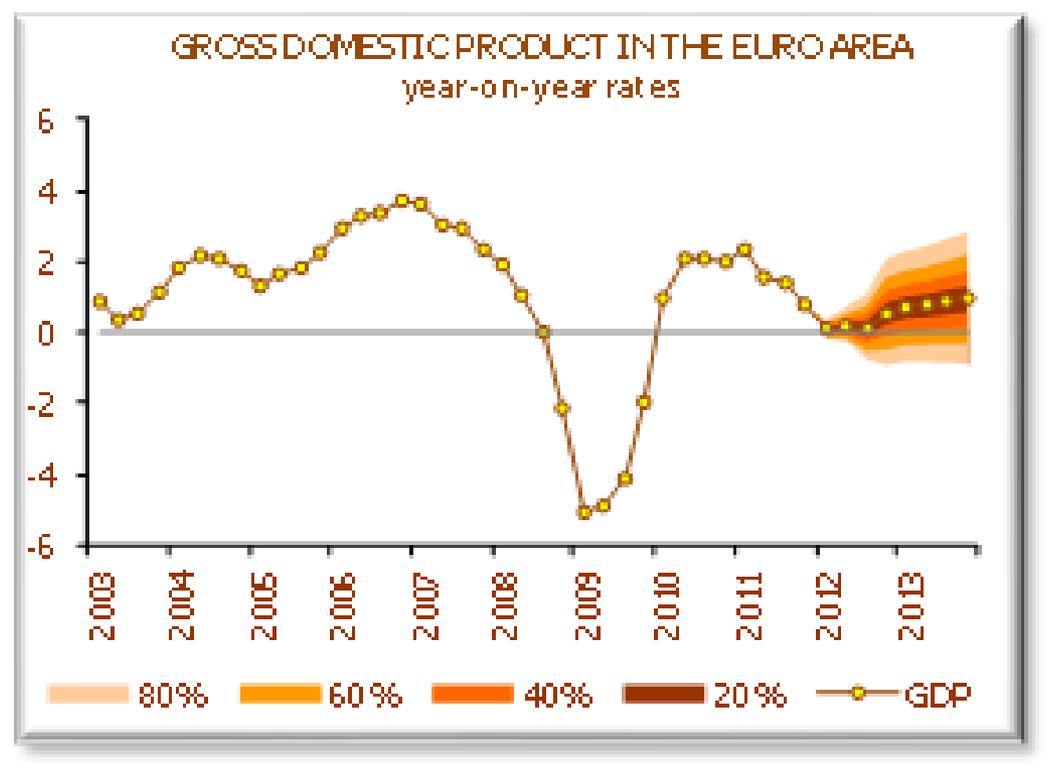


Source: INE & BIAM(UC3M)

Date: March 28, 2012

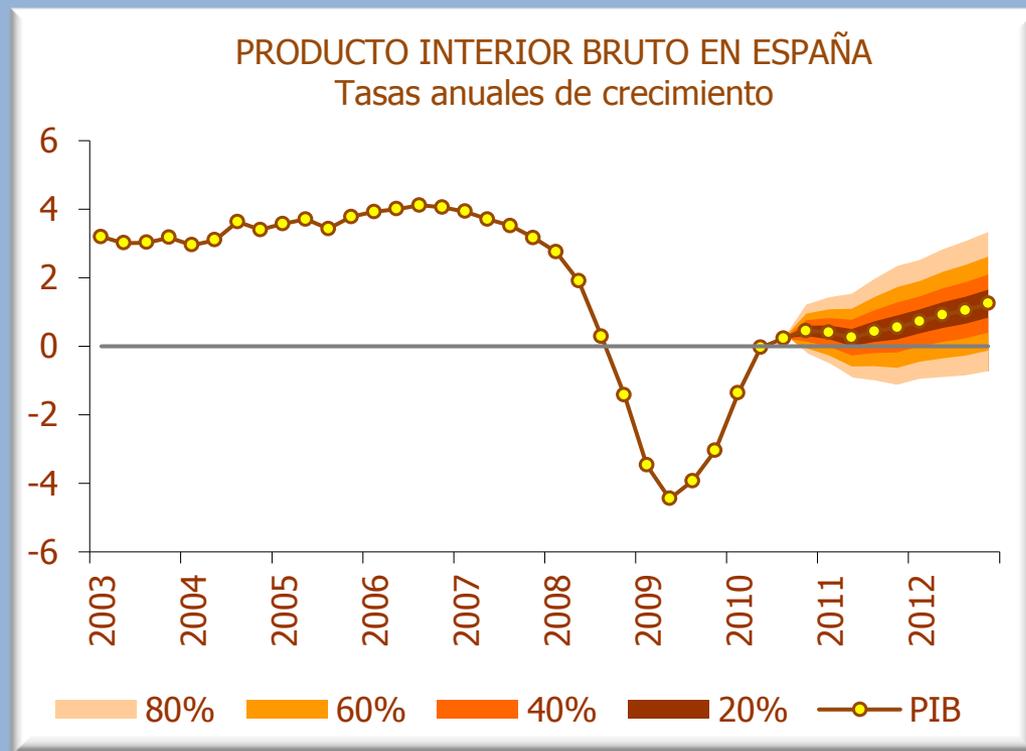


Fuente: INE & BIAM(UC3M)  
 Fecha: 14 de enero de 2011

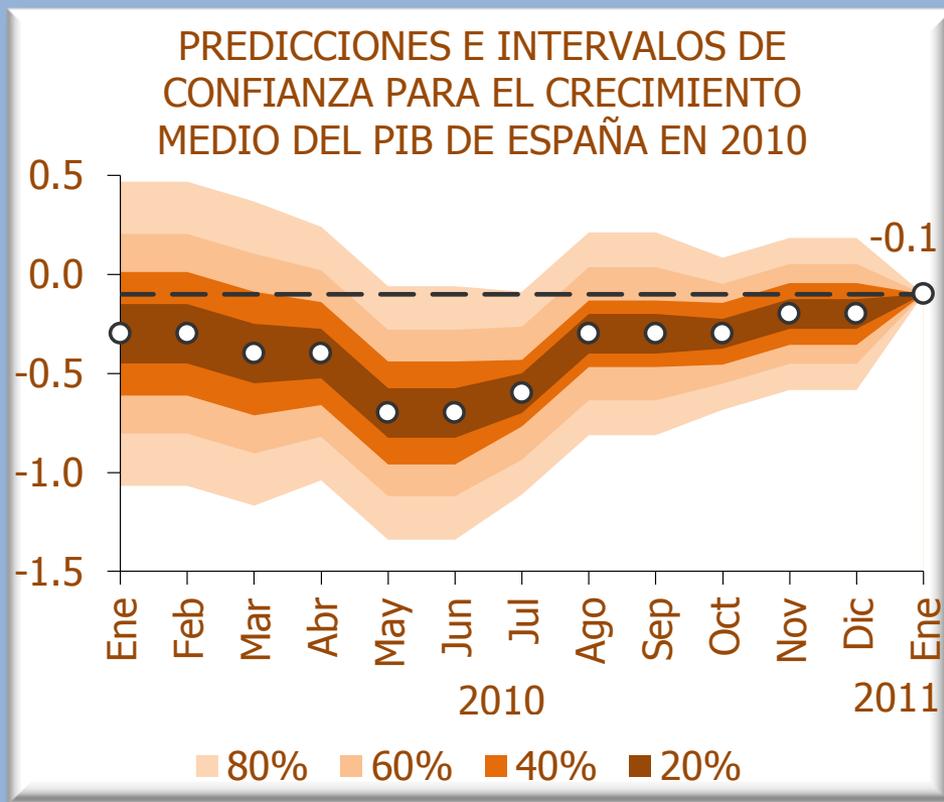


Source: EUROSTAT & BIAM (UC3M)

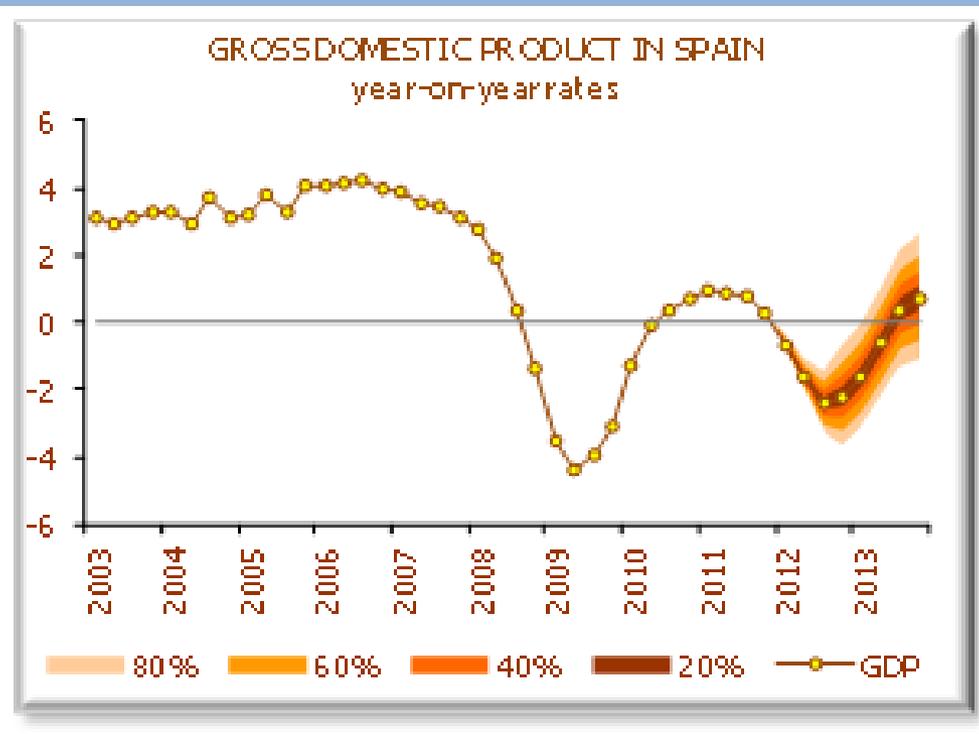
Date: March 20, 2012



Fuente: INE & BIAM(UC3M)  
 Fecha: 28 de enero de 2011

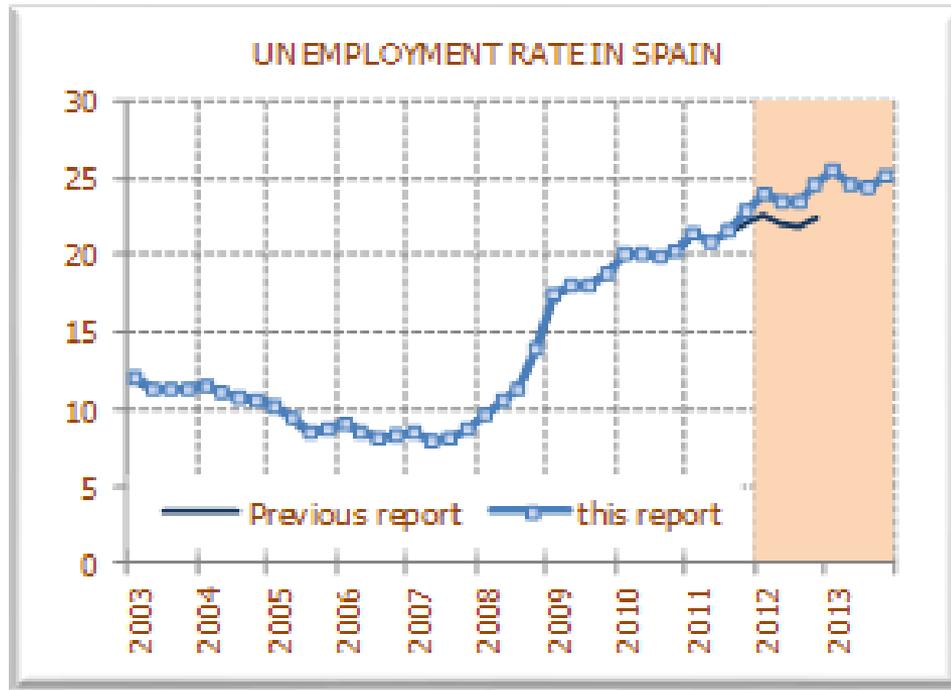


Fuente: INE & BIAM(UC3M)  
 Fecha: 16 de febrero de 2011



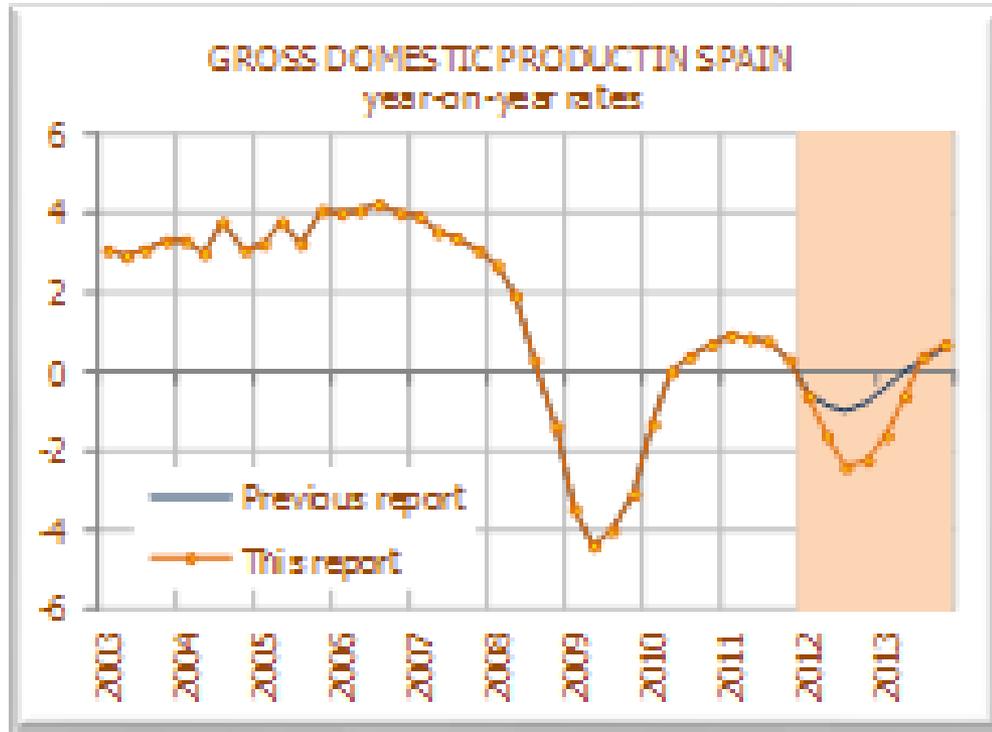
Source: INE & BIAM(UC3M)  
Date: March 20, 2012

# ACTUALIZACION DE PREDICCIONES



Source: INE & BIAM(UC3M)

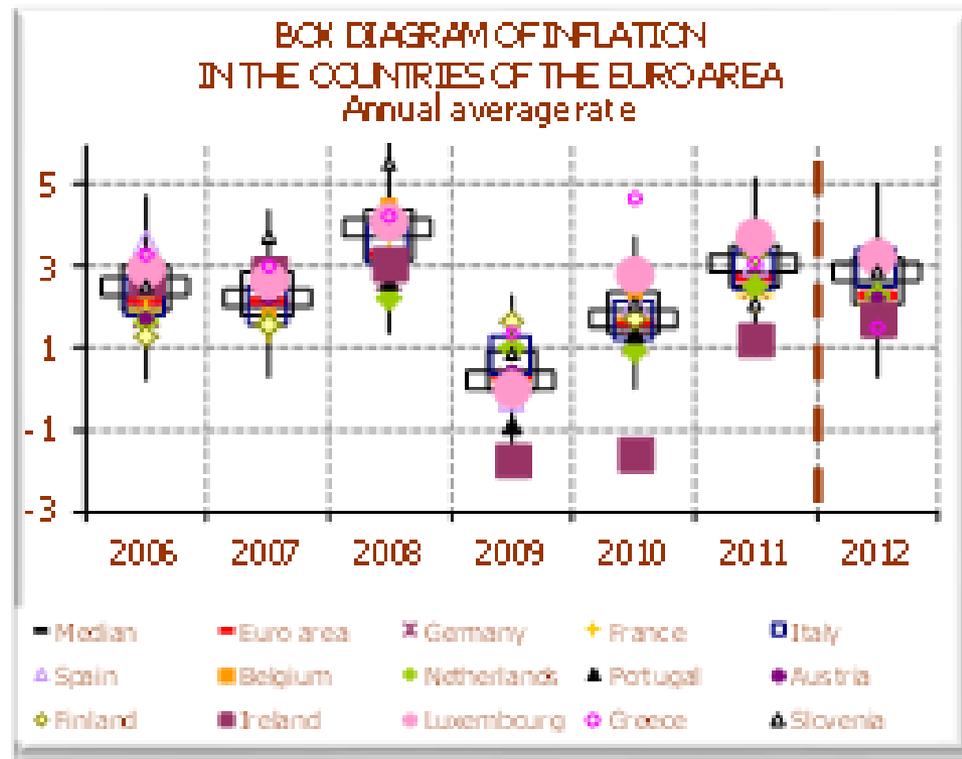
Date: March 28, 2012



Source: INE & BIAM(UC3M)

Date: March 20, 2012

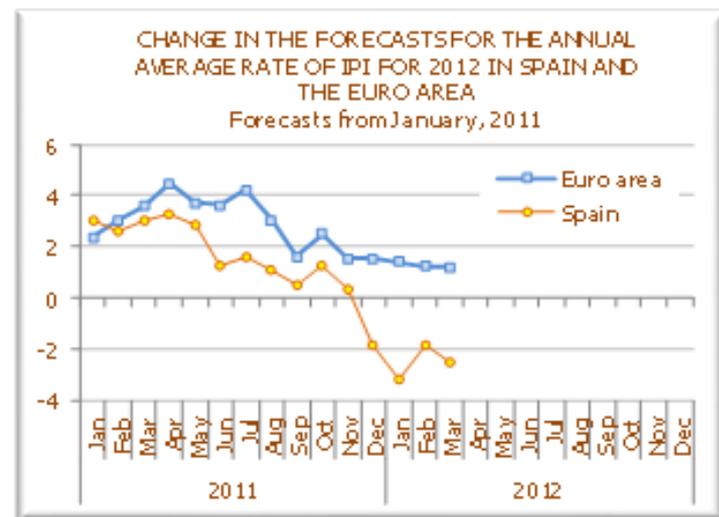
- PRESENTACION  
DE  
PREDICCIONES



Source: EUROSTAT & BIAM(UC3M)

Date: March 29, 2012

INDUSTRIAL PRODUCTION INDEX				
Average rate of growth				
	2010	2011	2012	2013
Spain				
Consumption	0,9	-1,4	<b>-0,6</b>	<b>-2,3</b>
Durable	-7,4	-10,8	<b>-10,9</b>	<b>-14,3</b>
Non-durable	1,9	-0,3	<b>0,4</b>	<b>-1,2</b>
Capital	-3,3	0,3	<b>-4,8</b>	<b>-3,4</b>
Intermediate	2,7	-2,6	<b>-3,7</b>	<b>-3,2</b>
Energy	2,5	-3,6	<b>-0,5</b>	<b>-0,5</b>
TOTAL	0,9	-1,8	<b>±2,3</b>	<b>±3,2</b>
Euro area				
Consumption	3,0	0,6	<b>-0,8</b>	<b>0,0</b>
Durable	2,6	0,6	<b>-3,7</b>	<b>-3,5</b>
Non-durable	3,1	0,6	<b>-0,4</b>	<b>0,5</b>
Capital	9,0	8,8	<b>6,0</b>	<b>6,8</b>
Intermediate	10,0	4,2	<b>-0,3</b>	<b>0,2</b>
Energy	3,9	-4,8	<b>-2,6</b>	<b>-1,1</b>
TOTAL	7,3	3,5	<b>1,2</b>	<b>2,1</b>
			<b>(±2,2)</b>	<b>(±2,6)</b>



CHANGE IN THE FORECASTS FOR IP IN SPAIN				CHANGE IN THE FORECASTS FOR IP IN THE EURO AREA			
Average annual rate, 2012				Average annual rate, 2012			
	Forecasts with the observed figure of:				Forecasts with the observed figure of:		
	Dec., 11	Jan., 12	Change		Dec., 2011	January, 2012	Change
Durable consumption	-10.7	-10.9	-0.3 ↓	Durable consumption	-6.7	-3.7	3.0 ↑
Non-durable consumption	1.3	0.4	-0.9 ↓	Non-durable consumption	0.1	-0.4	-0.5 ↓
Total consumption	0.2	-0.6	-0.8 ↓	Total consumption	-0.7	-0.8	-0.1 ↓
Equipment	-2.8	-4.8	-2.0 ↓	Equipment	6.5	6.0	-0.4 ↓
Intermediate	-3.5	-3.7	-0.3 ↓	Intermediate	-0.6	-0.3	0.4 ↑
Energy	-1.0	-0.5	0.5 ↑	Energy	-2.1	-2.6	-0.4 ↓
<b>TOTAL</b>	<b>-1.83</b>	<b>-2.51</b>	<b>-0.68</b> ↓	<b>TOTAL</b>	<b>1.26</b>	<b>1.22</b>	<b>-0.04</b> ↓

Source: EUROSTAT, INE & BIAM (UC3M)

Date: March 27, 2012

antoni.espasa@uc3m.es

# EL PRINCIPIO DE COMPRESION

- Una predicción comprende a otra si incluye toda la información relevante contenida en esta última .
- Se puede determinar mediante una regresión de los valores observados con las dos predicciones alternativas como regresores .

# Combinación de predicciones

# Interés y limitaciones de los modelos ARIMA en economía.

Las transparencias que siguen se desarrollarán en el tema 4.

- Esta conexión muestra **la debilidad y utilidad potencial de los modelos ARIMA** en Economía.
- Las **limitaciones** provienen principalmente del hecho de que los modelos univariantes **no consideran relaciones entre variables**.
- Así, **Granger (2001)** dice
- “los modelos univariantes **no están pensados como modelos relevantes para los propósitos prácticos más importantes en economía,**
- Aunque son muy utilizados como vehículos experimentales para estudiar nuevos modelos y técnicas”.

- Los modelos ARIMA resultan muy exitosos en:
- predicción y
- métodos de ajuste estacional.
- El éxito en predicción es -véase Clements and Hendry (1999)-, especialmente debido a la presencia de raíces unitarias.
- En la práctica, los agentes no sólo quieren predicciones fiables, sino que además necesitan una explicación de los factores económicos que las sustentan.

- Por naturaleza, los modelos ARIMA no son capaces de proporcionar esta explicación.
- Requiere modelos econométricos congruentes propugnados por Clements y Hendry, actualizándolos cada vez que ocurre un cambio estructural.
- En la actualidad, la construcción de estos modelos para la práctica general en la predicción periódica podría ser **en muchos casos compleja y costosa.**

