TEST DE HEGY

- **Hilleberg et. al (1990)** proponen un test para analizar la estacionalidad de una serie de frecuencia trimestral. Más precisamente para testear la **presencia de raíces unitarias estacionales.**

- Para datos trimestrales el polinomio $(1\text{-}L^4)$ puede ser expresado como:

$$(1-L)(1+L)(1-iL)(1+iL) \qquad (1)$$

- Por lo que las raíces unitarias son 1, -1, i y –i, que corresponden a la frecuencia 0, a la frecuencia bianual (dos ciclos por año) y a la frecuencia anual (1 ciclo por año).

- Para testear la hipótesis de que las raíces de $\varphi(L)$ caen fuera del círculo unitario, contra la alternativa de que caen dentro, es conveniente reescribir el polinomio autorregresivo como:

$$(1-\alpha_1 L)(1+\alpha_2 L)(1-\alpha_3 iL)(1+\alpha_4 iL) \qquad (2)$$

donde $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ es equivalente a tener $(1-L^4)$.

Esta descomposición considera las siguientes alternativas de estructura estocástica de una serie y_t:

(1) si $\alpha_1=1$, la variable tiene una raíz unitaria no estacional

(2) si $\alpha_2=1$, la variable tiene una raíz unitaria en frecuencia π semi-anual

(3) si $\alpha_3=1$ o $\alpha_4=1$, la variable tiene una raíz unitaria en frecuencia trimestral (frecuencia $\pi/2$ - ciclo anual)

- Es posible demostrar que alrededor del puntoe $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$, la ecuación (2) es equivalente a la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
(1-L^4) &= (\alpha_1 - 1)L(1 + L + L^2 + L^3) - (\alpha_2 - 1)L(1 - L + L^2 - L^3) + \\
&(\alpha_3 - 1)(1 - L^2)(1 + iL)iL - (\alpha_4 - 1)iL(1 - L^2)(1 - iL)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

- Definiendo $\gamma_i = \alpha_i - 1$ y aplicando (3) a y_t se obtiene la siguiente igualdad que forma la base del test de HEGY:

$$
\begin{aligned}
(1-L^4)y_t &= \gamma_1(1 + L + L^2 + L^3)y_{t-1} - \gamma_2(1 - L + L^2 - L^3)y_{t-1} \\
&(1 - L^2)(\gamma_5 - \gamma_6 L)y_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

donde $\gamma_5 = (\gamma_3 - \gamma_4)i$ y $\gamma_6 = (\gamma_3 + \gamma_4)$

- Para implementar el test, se procede a definir las siguientes variables auxiliares:

$$\begin{aligned}
y_{1t-1} &= (1+L+L^2+L^3)y_{t-1} = y_{t-1}+y_{t-2}+y_{t-3}+y_{t-4} \\
y_{2t-1} &= (1-L+L^2-L^3)y_{t-1} = y_{t-1}-y_{t-2}+y_{t-3}-y_{t-4} \\
y_{3t-1} &= (1-L^2)y_{t-1} = y_{t-1}-y_{t-3} \\
y_{3t-2} &= y_{t-1}-y_{t-3}
\end{aligned} \qquad (5)$$

- Finalmente se estima la siguiente regresión por mínimos cuadrados ordinarios (MCO):

$$(1-L^4)y_t = \gamma_1 y_{1t-1} + \gamma_2 y_{2t-1} + \gamma_5 y_{3t-1} + \gamma_6 y_{3t-1} + \varepsilon_t \qquad (6)$$

A partir de esta regresión:

(1) si no se puede rechazar la hipótesis nula que $\gamma_i=0$, entonces hay una raíz unitaria no estacional en y_t (componente regular);

(2) si no se puede rechazar la hipótesis nula de que $\gamma_i=0$, entonces hay una raíz unitaria en frecuencia semestral (bianual) en y_t;

(3) si no se puede rechazar la hipótesis nula de que $\gamma_5=\gamma_6=0$, entonces hay una raíz unitaria en la frecuencia trimestral en y_t. En este caso se prueba la significación conjunta

Nótese que el test está estructurado alrededor de **hipótesis nulas de no estacionariedad.**

- El modelo de la ecuación (6) puede ser extendido (al igual que se extiende el test de Dickey-Fuller) incluyendo intercepto, una

$$(1-L^4)\,y_t = \gamma_1 y_{1t-1} + \gamma_2 y_{2t-1} + \gamma_5 y_{3t-1} - \gamma_6 y_{3t-1} + \gamma_0 + \beta t + \theta_1 D_1 + \theta \qquad \theta \qquad \varepsilon_t \qquad (7)$$

$$D \quad + \; D \;\; {}^{2} + {}^{2\;3} \qquad {}^{3}$$

Esta ecuación puede ser estimada con MCO, pero los tests de hipótesis no tienen la distribución estándar normal, sino una distribución particular tabulada por Hylleberg et al. (1990) que depende de la presencia de regresores de intercepto, tendencia determinística o estacionalidad determinística.

Beaulieu y Miron (1992), al igual que Franses (1991) extendieron la metodología HEGY de datos trimestrales para datos mensuales.

Referencias bibliográficas:

Hylleberg, S., Engle, R.F., Granger, C. W.J. y Yoo, B.S. (1990): *Seasonal Integration and Co-Integration. Journal of Econometrics*, 44, pp. 215-228.

Franses, P.H. (1991): Model Selection and Seasonality in Time Series. Timbergen Institute, Series, No. 18.

Beaulieu, J.J. y Miron, J.A. (1993): Seasonal Unit Roots in Aggregate U.S. Data. Journal of Econometrics, 55, pp. 305-328.